Απειροστικός Λογισμός Ι (2009–10)
Συνέχεια και όρια συναρτήσεων – Ασκήσεις

Α. Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)=1$, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε: για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει $f(x)>\frac{4}{5}$.

2. Η $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής.

3. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από τις: $f(x)=0$ αν $x\in\mathbb{N}$ και $f(x)=1$ αν $x\notin\mathbb{N}$, είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $x_0\notin\mathbb{N}$.

4. Υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $0,1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

5. Υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

6. Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

7. Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο x, τότε είναι συνεχής σε κάθε x.

8. Αν η f είναι συνεχής στο (a,b) και $f(q)=0$ για κάθε ρητό $q\in(a,b)$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in(a,b)$.

9. Αν $f\left(\frac{1}{n}\right)=(-1)^n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε η f είναι ασυνεχής στο σημείο 0.

10. Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(0)=-f(1)$ τότε υπάρχει $x_0\in[0,1]$ ώστε $f(x_0)=0$.

11. Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο (a,b).

12. Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.

13. Αν $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x)\sin\frac{1}{x}=0$.

Ασκήσεις: συνέχεια συναρτήσεων – Ομάδα Α′

1. Έστω $f:X\to\mathbb{R}$ και έστω $x_0\in X$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)\neq 0$, δείξτε ότι:

(α) αν $f(x_0)>0$, υπάρχει $\delta>0$ ώστε: αν $|x-x_0|<\delta$ και $x\in X$ τότε $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0$.

(β) αν $f(x_0)<0$, υπάρχει $\delta>0$ ώστε: αν $|x-x_0|<\delta$ και $x\in X$ τότε $f(x)<\frac{f(x_0)}{2}<0$.

2. Έστω $f:X\to\mathbb{R}$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M\geq 0$ ώστε $|f(x)-f(y)|\leq M\cdot|x-y|$, για κάθε $x\in X$ και $y\in X$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με $|f(x)|\leq|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

(β) Δώστε παράδειγμα μιας τέτοιας f που να είναι ασυνεχής σε κάθε $x\neq 0$.

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $g(0)=0$ και $|f(x)|\leq|g(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $a_1\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε $a_{n+1}=f(a_n)$ για $n=1,2,\dots$. Αν $a_n\to a\in\mathbb{R}$ τότε $f(a)=a$.

6. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\\ x^3 & \text{αν } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ είναι συνεχής μόνο στα σημεία $-1,0,1$.

7. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι:

(α) Αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) = g(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

(γ) Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) \leq g(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

8. Έστω $f : [a, b] \to [a, b]$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x \in [a, b]$ με $f(x) = x$.

9. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f(x)| = 1$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

10. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $g \equiv f$ ή $g \equiv -f$ στο $[a, b]$.

11. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

12. Έστω $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: $f(x) = x^2$ για κάθε ρητό $x \in (0, 1)$. Να βρεθεί το $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

13. Έστω $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in [0, 1]$ με $f(x + 1) = f(x)$.

14. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) = f(1)$. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ ώστε $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

15. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2 \in [a, b]$. Δείξτε ότι για κάθε $t \in [0, 1]$ υπάρχει $y_t \in [a, b]$ ώστε

$$f(y_t) = tf(x_1) + (1 - t)f(x_2).$$

16. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε

$$f(y) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

17. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $f(x) \geq \xi$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Ισχύει το συμπέρασμα αν αντικαταστήσουμε το διάστημα $[a, b]$ με το διάστημα $(a, b]$;

18. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $f(x) > g(x) + \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.

19. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

20. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $\max(f) < \max(g)$.

21. Έστω $f, g : [a, b] \to [c, d]$ συνεχείς και επί συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

22. Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{\alpha}{x - \lambda} + \frac{\beta}{x - \mu} + \frac{\gamma}{x - \nu} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν).

Ασκήσεις: όρια συναρτήσεων – Ομάδα Α΄

23. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δείξτε ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x + a} - \sqrt{x}\right) = \frac{a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

24. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια και, αν ναι, υπολογίστε τα.

(α) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$, (β) $\lim_{x\to x_0} [x]$, (γ) $\lim_{x\to x_0} (x-[x])$.

25. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -x & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ και ότι αν $x_0 \neq 0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

26. Εξετάστε αν είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις:

(α) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{αν } x\neq 0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$

(β) $f_k:[-1,0]\to\mathbb{R}$ με $f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\frac{1}{x} & \text{αν } x\neq 0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$ $(k=0,1,2,\ldots)$

(γ) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2} & \text{αν } x\neq 0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$

27. Δείξτε ότι αν $a,b>0$ τότε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] = 0.$$

Τι γίνεται όταν $x\to 0^-$;

28. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=1$ αν $x\in\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$ και 0 αλλιώς. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

29. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

(α) Δείξτε ότι αν $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

(β) Δώστε ένα παράδειγμα όπου $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ενώ $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

30. Έστω $X\subset\mathbb{R}$, $f,g:X\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και έστω $x_0\in\mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap X$ και ότι $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

31. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T>0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

32. Έστω $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο με την ιδιότητα $a_0 a_m < 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει θετική πραγματική ρίζα.

33. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο: υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 για τον οποίο

$$f(x_0) = x_0.$$

34. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $y\in\mathbb{R}$ ώστε $f(y)\geq f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

35. (α) Έστω $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\geq 0$ δείξτε ότι η g διατηρεί πρόσημο: ή $g(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$ ή $g(x)<0$ για κάθε $x\geq 0$.

(β) Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x)\neq x$ για κάθε $x\geq 0$, δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

36. Υποθέτουμε ότι η $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in [a, +\infty)$ με $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.

37. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$, τότε η f παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

38. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

39. Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση γνησίως αύξουσα και συνεχής. Δείξτε ότι

$$f((\alpha, \beta)) = (\lim_{x \to \alpha^+} f(x), \lim_{x \to \beta^-} f(x)).$$

Ασκήσεις: συνέχεια και όρια συναρτήσεων – Ομάδα Β΄

40. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x$ προφανώς ικανοποιεί την $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Αντίστροφα, δείξτε ότι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια *συνεχής* συνάρτηση με $f(1) = \alpha$, η οποία ικανοποιεί την $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, τότε:

(α) $f(n) = n\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) $f(\frac{1}{m}) = \frac{\alpha}{m}$ για κάθε $m = 1, 2, \ldots$.

(γ) $f(x) = \alpha x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

41. Μελετήστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \\ \frac{1}{q} & , x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p, q) = 1. \end{cases}$$

42. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ότι $f(x/2) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

43. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(\frac{m}{2^n}) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

44. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) = f\big(x + \frac{1}{n}\big)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

45. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $A = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$. Αν $A \neq \emptyset$, δείξτε ότι $\sup A \in A$ και $\inf A \in A$.

46. Έστω $a \in [0, \pi]$. Ορίζουμε ακολουθία με $a_1 = a$ και $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Δείξτε ότι $a_n \to 0$.

47. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n \in [0, 1]$ ώστε $f(x_n) \to 0$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

48. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$: δηλαδή, $f(x + T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = f(x + \sqrt{2})$.

49. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a < b$ και ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[0, +\infty)$ με $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ και $f(x_n) \to a$, $f(y_n) \to b$. Δείξτε ότι: για κάθε $c \in (a, b)$ υπάρχει ακολουθία (z_n) στο $[0, +\infty)$ με $z_n \to +\infty$ και $f(z_n) \to c$.

50. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε *μονότονη* ακολουθία (x_n) σημείων του (a, b) με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

51. (α) Έστω $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Αν $\lim_{n\to\infty} f(a+t_n)=L$ για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία (t_n) με $t_n\to 0$, τότε $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$.

(β) Σωστό ή λάθος; Έστω $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Αν $\lim_{n\to\infty} f\left(a+\frac{1}{n}\right)=L$ τότε $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$.

52. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0\in(a,b)$. Δείξτε ότι το $f(x_0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του $f([a,b])$.

53. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $|f(x)-f(y)|\geq|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι επί.

54. Έστω $f,g:[0,1]\to[0,1]$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα και $g\circ f=f\circ g$. Δείξτε ότι οι f και g έχουν κοινό σταθερό σημείο: υπάρχει $y\in[0,1]$ ώστε $f(y)=y$ και $g(y)=y$. [*Υπόδειξη:* Ξέρουμε ότι υπάρχει $x_1\in[0,1]$ με $g(x_1)=x_1$. Αν ισχύει και η $f(x_1)=x_1$, έχουμε τελειώσει. Αν όχι, θεωρήστε την ακολουθία $x_{n+1}=f(x_n)$, δείξτε ότι είναι μονότονη και ότι όλοι οι όροι της είναι σταθερά σημεία της g. Το όριό της θα είναι κοινό σταθερό σημείο των f και g (γιατί;).]

55. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_0\in[a,b]$ υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Τότε, η f είναι φραγμένη.

Για τις επόμενες δύο ασκήσεις δίνουμε τον εξής ορισμό: Έστω $f:X\to\mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα, τοπικό ελάχιστο) στο $x_0\in X$ αν υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει η ανισότητα $f(x)\leq f(x_0)$ (αντίστοιχα, $f(x_0)\leq f(x)$).

56. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σε κανένα σημείο του (a,b). Δείξτε ότι η f είναι μονότονη στο (a,b).

57. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν η f έχει τοπικό μέγιστο σε δύο διαφορετικά σημεία x_1,x_2 του $[a,b]$, τότε υπάρχει x_3 ανάμεσα στα x_1,x_2 στο οποίο η f έχει τοπικό ελάχιστο.