Απειροστικός Λογισμός Ι (2009–10)
Συναρτήσεις – Ασκήσεις

1. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : [0,1] \to [a,b] : x \to a + (b-a)x$ είναι 1-1 και επί.

2. Έστω $f, g : [0,1] \to [0,1]$ με $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ και $g(t) = 4t(1-t)$.
(α) Να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$.
(β) Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} αλλά δεν ορίζεται η g^{-1}.

3. Έστω $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ δύο συναρτήσεις που είναι 1-1 και επί. Δείξτε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $(f \circ g)^{-1}$ της $f \circ g$ και ότι $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

4. Έστω $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ δύο συναρτήσεις. Δείξτε ότι

(α) αν η $f \circ g$ είναι επί τότε και η f είναι επί.

(β) αν η $f \circ g$ είναι 1-1 τότε και η g είναι 1-1.

Ισχύουν τα αντίστροφα των (α) και (β);

5. Έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $g : Y \to X$ και $h : Y \to X$ ώστε $f \circ g = Id_Y$ και $h \circ f = Id_X$. Δείξτε ότι $h = g$.

6. Έστω $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

(β) Να βρεθεί η $f \circ f$.

(γ) Να βρεθούν τα $f(\frac{1}{x})$, $f(cx)$, $f(x+y)$, $f(x) + f(y)$.

(δ) Για ποιά $c \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(cx) = f(x)$;

(ε) Για ποιά $c \in \mathbb{R}$ η σχέση $f(cx) = f(x)$ ικανοποιείται για δύο διαφορετικές τιμές του $x \in \mathbb{R}$;

7. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα I_1 και I_2, είναι αλήθεια ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $I_1 \cup I_2$;

8. Έστω $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2+1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$. Εξετάστε αν είναι μονότονη και βρείτε την f^{-1} (αν αυτή ορίζεται).

9. Έστω $f(x) = x+1$. Να βρεθεί μια συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $g \circ f = f \circ g$. Είναι η g μοναδική;

10. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Ποιό είναι το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})$;

11. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, συμβολίζουμε με $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ την **χαρακτηριστική συνάρτηση** του A που ορίζεται από την $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in A \\ 0 & \text{αν } x \notin A \end{cases}$. Αποδείξτε ότι

(α) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ (ειδικότερα $\chi_A = \chi_A^2$),

(β) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$,

(γ) $\chi_{\mathbb{R} \setminus A} = 1 - \chi_A$,

(δ) $A \subseteq B \iff \chi_A \leq \chi_B$ και

(ε) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση με $f^2 = f$, τότε υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $f = \chi_A$.

12. Μια συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λέγεται **άρτια** αν $g(-x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και **περιττή** αν $g(-x)=-g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γράφεται ως άθροισμα $f=f_a+f_p$ όπου f_a άρτια και f_p περιττή, και ότι αυτή η αναπαράσταση είναι μοναδική.

13. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λέγεται **περιοδική (με περίοδο a)** αν υπάρχει $a\neq 0$ στο $\mathbb{R}$ ώστε $f(x+a)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από την $f(x)=[x]$ δεν είναι περιοδική.

(β) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από την $f(x)=x-[x]$ είναι περιοδική.

14. Έστω $n\in\mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx]$$

είναι περιοδική με περίοδο $1/n$. Δηλαδή, $f\big(x+\frac{1}{n}\big)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(β) Υπολογίστε την τιμή $f(x)$ όταν $0\leq x<1/n$.

(γ) Δείξτε την ταυτότητα

$$[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και κάθε $n\in\mathbb{N}$.

15. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

(α) $f(0)=0$ και $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(β) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n).$$

(γ) $f(\frac{1}{n})=\frac{f(1)}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(δ) Υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $f(q)=\lambda q$ για κάθε $q\in\mathbb{Q}$.

16. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(y)-f(x)\leq (y-x)^2$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

[*Υπόδειξη:* Αν $|f(b)-f(a)|=\delta>0$ για κάποια $a<b$ στο $\mathbb{R}$, διαιρέστε το διάστημα $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα, όπου n αρκετά μεγάλος φυσικός αριθμός.]