Πώς να βρείτε μια ασυνήθιστη απόδειξη για το γεγονός ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι φραγμένη

W. T. Gowers

Προαπαιτούμενα

Ο ορισμός της συνέχειας (μέσω των ε και δ) και ο ορισμός της φραγμένης συνάρτησης. Το αξίωμα της πληρότητας.

Οι συνήθεις αποδείξεις

Μια από τις γνωστές αποδείξεις έχει σαν αφετηρία το θεώρημα Heine-Borel: όπως κι αν γράψουμε το $[0,1]$ σαν ένωση μιας οικογένειας ανοικτών συνόλων, μπορούμε πάντα να το γράψουμε και σαν ένωση μιας πεπερασμένης υποοικογένειας της. Για να αποδείξουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, για κάθε x ορίζουμε U_x να είναι το σύνολο όλων των y για τα οποία $|f(y) - f(x)| < 1$. Τα σύνολα U_x είναι ανοικτά και η ένωση τους είναι προφανώς ολόκληρο το $[0,1]$. Από το θεώρημα Heine-Borel υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n$ ώστε η ένωση των συνόλων U_{x_i} να είναι ολόκληρο το $[0,1]$. Όμως, τότε, η f είναι άνω φραγμένη από τον $M := 1 + \max\limits_{1 \le i \le n} f(x_i)$.

Μια άλλη γνωστή απόδειξη ξεκινάει με το θεώρημα Bolzano-Weierstrass: κάθε ακολουθία στο $[0,1]$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε, αν το συμπέρασμα του θεωρήματος δεν ισχύει για την f, μπορούμε να βρούμε μια άπειρη ακολουθία (x_n) ώστε $f(x_n) > n$ για κάθε n. Επιλέγουμε υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε κάποιο x και ελέγχουμε ότι η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο x.

Ανακαλύπτοντας μια απόδειξη χωρίς να γνωρίζουμε την έννοια της συμπάγειας

Οι δύο αποδείξεις που περιγράψαμε πιο πάνω βασίζονται, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, στο γεγονός ότι το κλειστό διάστημα $[0,1]$ είναι *συμπαγές*. (Λέμε γενικά ότι ένα σύνολο είναι συμπαγές αν ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος Heine-Borel. Για υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σαν ορισμό το θεώρημα Bolzano-Weierstrass). Τι θα μπορούσαμε να κάνουμε αν δεν είχαμε ποτέ συναντήσει την έννοια της συμπάγειας σε οποιαδήποτε μορφή της;

Ας φανταστούμε ότι πρέπει να αντιμετωπίσουμε μια συνάρτηση ορισμένη στο $[0,1]$ για την οποία δεν γνωρίζουμε τίποτα πέρα από το ότι είναι συνεχής. Πώς μπορούμε να την στριμώξουμε; Μια πολύ μικρή παρατήρηση είναι ότι η τιμή $f(x)$ είναι πεπερασμένη για κάθε x, αφού αυτό εννοούμε όταν μιλάμε για μια συνάρτηση που παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω; Λογικά, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και τον ορισμό της συνέχειας. Ας τον θυμηθούμε λοιπόν. Λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι *συνεχής στο* x αν

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε } |y - x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Αφού γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο x, μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε ε – για να γίνουμε συγκεκριμένοι ας πάρουμε $\varepsilon = 1$ – και να βρούμε δ ώστε $f(y) < f(x) + 1$ για κάθε y στο διάστημα $(x - \delta, x + \delta)$.

Μοιάζει σαν να έχουμε κάνει κάποια μικρή πρόοδο, αφού έχουμε δείξει ότι η f είναι φραγμένη σε ένα ολόκληρο ανοικτό διάστημα. Δεν έχουμε όμως κανένα έλεγχο πάνω στο μήκος του διαστήματος, οπότε δεν θα έπρεπε να είμαστε πολύ ενθουσιασμένοι.

Υπάρχει κάτι άλλο που θα μπορούσαμε να κάνουμε; Θα μπορούσαμε ίσως να παρατηρήσουμε ότι αν έχουμε δύο επικαλυπτόμενα διαστήματα σε καθένα από τα οποία η f είναι φραγμένη, τότε η f είναι φραγμένη στην ένωση τους. Υπάρχει κάποιος τρόπος να βρούμε ένα διάστημα το οποίο να επικαλύπτεται με το $(x - \delta, x + \delta)$ και στο οποίο η f είναι φραγμένη; Ο μόνος τρόπος που γνωρίζουμε, ως τώρα, για να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο διάστημα, είναι να επιλέξουμε ένα σημείο y και να βρούμε γ ώστε $|f(z) - f(y)| < 1$ για κάθε z στο διάστημα $(y - \gamma, y + \gamma)$. Πώς όμως μπορούμε να πετύχουμε αυτό το διάστημα να επικαλύπτεται με το $(x - \delta, x + \delta)$; Αν βέβαια το ίδιο το y ανήκει στο $(x - \delta, x + \delta)$ τότε θα έχουμε κάποια επικάλυψη, υπάρχει όμως ο κίνδυνος το $(y - \gamma, y + \gamma)$ να περιέχεται εξ ολοκλήρου στο $(x - \delta, x + \delta)$, οπότε δεν έχουμε κερδίσει τίποτα. Από την άλλη πλευρά, αν το y δεν ανήκει στο $[x - \delta, x + \delta]$ τότε το γ μπορεί να είναι τόσο μικρό που να μην έχουμε καμία επικάλυψη. Οι παρατηρήσεις αυτές υποδεικνύουν ότι θα έπρεπε να επιλέξουμε $y = x + \delta$ ή $y = x - \delta$. Αν κάνουμε την πρώτη επιλογή, τότε βρίσκουμε $\gamma > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $(x - \delta, x + \delta + \gamma)$.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να γίνουμε λίγο πιο συστηματικοί. Θα ξεκινήσουμε με $x = 0$ και θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε ένα όλο και μεγαλύτερο διάστημα $[0, t)$ στο οποίο η f είναι φραγμένη. Με λίγη τύχη, ίσως καταφέρουμε να σπρώξουμε το t ως το 1.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(0) = 0$. Το πρώτο βήμα είναι να βρούμε t_1 ώστε $f(x) < 1$ για κάθε x στο $[0, t_1)$ (χρησιμοποιώντας φυσικά τον ορισμό της συνέχειας). Κατόπιν, εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας στο σημείο t_1 και βρίσκουμε, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, ένα $t_2 > t_1$ ώστε $f(x) < 2$ για κάθε x στο $[0, t_2)$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Έτσι, παράγεται μια ακολουθία $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ με την ιδιότητα $f(x) < n$ για κάθε x στο $[0, t_n)$.

Τελειώσαμε; Όχι, γιατί μπορεί η ακολουθία (t_n) να συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $s < 1$. Τότε, το μόνο που θα είχαμε καταφέρει θα ήταν να δείξουμε ότι ο περιορισμός της f στο $[0, t)$ είναι φραγμένη συνάρτηση για κάθε $t < s$. Αυτή είναι μια ενδιαφέρουσα πρόταση, πολύ ασθενέστερη όμως από αυτήν που ελπίζουμε να αποδείξουμε.

Έχουμε κολλήσει τελείως; Ναι, με την έννοια ότι κάναμε άπειρα βήματα αλλά δεν φτάσαμε στο στόχο μας. Την ίδια όμως στιγμή, ίσως υπάρχουν κι άλλα πράγματα που θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε. Έχουμε κατά κάποιον τρόπο «φτάσει» στο s. Μπορούμε να προχωρήσουμε λίγο πιο πέρα;

Ένα προφανές πράγμα που μπορούμε να κάνουμε είναι να συνεχίσουμε με την ίδια τεχνική, να εφαρμόσουμε δηλαδή τον ορισμό της συνέχειας με $\varepsilon = 1$, σε κάποιο σημείο που θα επιλέξουμε προσεκτικά. Υπάρχει κάποιο σημείο που θα μας βοηθούσε αυτή τη στιγμή; Υπάρχει όντως – το σημείο s. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f(x) - f(s)| < 1$ για κάθε x στο διάστημα $(s - \delta, s + \delta)$. Αυτό το διάστημα πρέπει να περιέχει κάποιο

t_n, συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f(s) < n+1$, άρα $f(x) < n+2$ για κάθε $x < s+\delta$. Καταφέραμε λοιπόν να συνεχίσουμε την ακολουθία (t_n) «πέρα από το άπειρο».

Αν κάποιος γνωρίζει τους διατακτικούς αριθμούς, θα δει ότι η παρατήρηση που κάναμε οδηγεί σε μια ιδέα απόδειξης – μπορούμε να συνεχίσουμε με το ίδιο επιχείρημα, δημιουργώντας μια υπερπεπερασμένη ακολουθία. Αυτή η ιδέα δουλεύει, γιατί η ακολουθία που θα προκύψει, αν κατασκευαστεί με τον σωστό τρόπο, είναι ένα καλά διατεταγμένο σύνολο. Αν το θεώρημα δεν ίσχυε, θα καταφέρναμε να κατασκευάσουμε ένα υπεραριθμήσιμο καλά διατεταγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, κάτι που εύκολα μπορούμε να δούμε ότι δεν γίνεται.

Κάποιος που δεν γνωρίζει τους διατακτικούς αριθμούς θα σκεφτεί πιθανότατα ως εξής. Μπορώ να συνεχίζω να φτιάχνω όλο και μεγαλύτερα διαστήματα $[0,t)$ στα οποία η f είναι φραγμένη. Αν μου δοθεί ένα τέτοιο διάστημα, μπορώ πάντα να το επεκτείνω, και αν μου δοθεί μια αριθμήσιμη ακολουθία $([0,t_n))$ τέτοιων διαστημάτων, μπορώ πάντα να βρω ένα άλλο διάστημα αυτής της μορφής που τα περιέχει. Αυτό μοιάζει αρκετό, δεν μπορώ όμως να σκεφτώ πώς να περιγράψω αυτό που συμβαίνει. Ξεκινάω με $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$, μετά βρίσκω ένα καινούργιο s μεγαλύτερο από όλα αυτά, το οποίο θα μπορούσα να ονομάσω s_1. Θα μπορούσα μετά να συνεχίσω με $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$ και ούτω καθεξής, μετά να βρω κάποιο r μεγαλύτερο από όλα αυτά, και να ξεκινήσω την κατασκευή μιας ακόμα ακολουθίας από αυτό. Θα μπορούσα να επαναλάβω *όλην αυτή τη διαδικασία* άπειρες φορές χωρίς όμως αναγκαστικά να φτάσω στο 1. Από την άλλη πλευρά, θα μπορούσα πάλι να συνεχίσω.

Το πρόβλημα μοιάζει να σχετίζεται με τη δυσκολία της περιγραφής μιας ακολουθίας που πηγαίνει πέρα από το άπειρο με αυτό τον τρόπο. Πώς μπορούμε να την ξεπεράσουμε; (Όπως είπα πιο πριν, υπάρχει ένας αυστηρός τρόπος περιγραφής αυτής της «υπερπεπερασμένης» διαδικασίας, μπορούμε λοιπόν να δώσουμε ένα επιχείρημα βασισμένο σε αυτή την ιδέα – δεν είναι όμως απαραίτητο). Ας σκεφτούμε λίγο πιο προσεκτικά τι κάνουμε. Κατασκευάζουμε μια ακολουθία, αρχικά με ένα επαγωγικό επιχείρημα (αν έχουμε κατασκευάσει το t_n, προχωράμε και κατασκευάζουμε το t_{n+1}), και μετά, με κάτι που μοιάζει με επαγωγικό επιχείρημα (αν έχουμε κατασκευάσει όλα τα t_n, προχωράμε και κατασκευάζουμε το s_1). Η γενικευμένη επαγωγή είναι δυσκολότερη γιατί δεν έχουμε ένα καλό σύνολο δεικτών σαν αυτό των φυσικών αριθμών. Υπάρχει κάποιος τρόπος να κάνουμε επαγωγή χωρίς την υποστήριξη ενός κατάλληλου συνόλου δεικτών; Ναι υπάρχει: κοιτάς το μικρότερο αντιπαράδειγμα.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδέα του μικρότερου αντιπαραδείγματος στο πρόβλημα μας; Έχουμε μια διαδικασία βαθμιαίας επέκτασης του διαστήματος $[0,t)$ στο οποίο γνωρίζουμε ότι η f είναι φραγμένη. Αν μπορέσουμε να σπρώξουμε το t ως το 1, έχουμε τελειώσει. Αν δεν μπορούμε, τότε πρέπει να υπάρχει κάποιο είδος φράγματος – δηλαδή, ένα σημείο πέρα από το οποίο δεν μπορούμε να περάσουμε. Γιατί να μην κοιτάξουμε το *πρώτο τέτοιο σημείο*;

Δεν είναι ακόμα τελείως φανερό ότι η ιδέα μας θα δουλέψει. Ας προσπαθήσουμε όμως. Είναι σωστό ότι υπάρχει κάποιο ελάχιστο t με την ιδιότητα ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[0,t)$; Αν η f δεν είναι φραγμένη, τότε δεν είναι φραγμένη στο $[0,1)$ (εφαρμόστε τη συνέχεια στο 1), υπάρχει λοιπόν τουλάχιστον ένα t ώστε η f να μην είναι φραγμένη στο $[0,t)$. Τότε, από το αξίωμα του ελάχιστου άνω φράγματος (αν και εδώ βρίσκουμε ένα μέγιστο κάτω φράγμα) επιλέγουμε το infimum s όλων των t

που έχουν αυτή την ιδιότητα. Αν υπάρχει κάποιο ελάχιστο t όπως το θέλουμε, αυτό πρέπει να είναι το s.

Ξέρουμε ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[0,t)$ για κάθε $t > s$. Έπεται από αυτό ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[0,s)$; Ναι, γιατί αν η f ήταν *φραγμένη* στο $[0,s)$, τότε από τη συνέχεια στο s (το γνωστό επιχείρημα) θα ήταν φραγμένη στο $[0,s+\gamma)$ για κατάλληλα μικρό $\gamma > 0$.

Εχοντας βρει το ελάχιστο s για το οποίο η f δεν είναι φραγμένη στο $[0,s)$, ελπίζουμε τώρα ότι θα οδηγηθούμε σε αντίφαση. Τώρα όλοι ξέρουμε ότι αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τη συνέχεια στο s. Η f είναι φραγμένη στο $(s-\gamma, s+\gamma)$ για κατάλληλο γ. Επίσης, είναι φραγμένη στο $[0, s-\gamma/2)$. Συνεπώς, είναι φραγμένη στο $[0,s)$ και έχουμε το άτοπο που θέλαμε.

Μια μικρή παραλλαγή αυτού του επιχειρήματος

Ένα άλλο επιχείρημα που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε είναι το εξής. Έστω X το σύνολο όλων των t για τα οποία η f είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,t]$. Τι μπορούμε να πούμε για το X; Σίγουρα, αν το s ανήκει στο X και $r < s$ τότε το r ανήκει στο X. Συνεπώς, το X είναι κάποιο διάστημα της μορφής $[0,u)$ ή της μορφής $[0,u]$. Στην πρώτη περίπτωση, εφαρμόζουμε τη συνέχεια στο u για να δείξουμε ότι το $[0,u)$ δεν μπορεί τελικά να είναι όλο το X. Στην δεύτερη περίπτωση, εφαρμόζουμε τη συνέχεια στο u για να δείξουμε ότι το $[0,u]$ δεν μπορεί τελικά να είναι όλο το X, εκτός αν $u = 1$.

Πώς οδηγούμαστε σε μια πιο συμβατική απόδειξη;

Κατά τη γνώμη μου, η απόδειξη που περιέγραψα είναι φυσιολογική με την έννοια ότι η ιδέα να επεκτείνουμε το διάστημα στο οποίο η f είναι φράγμενη είναι μάλλον «το πρώτο πράγμα που θα προσπαθούσε κανείς». Δεν είναι όμως τόσο κομψή (τουλάχιστον στην πρώτη εκδοχή της) όσο οι γνωστές αποδείξεις που χρησιμοποιούν το θεώρημα Heine-Borel ή το θεώρημα Bolzano-Weierstrass. Θα μπορούσε ίσως κάποιος να σκεφτεί αυτά τα θεωρήματα χωρίς προηγουμένως να περάσει από τους συλλογισμούς που αναπτύξαμε. Όταν, στην αρχή, εφαρμόσαμε τον ορισμό της συνέχειας, κατασκευάσαμε, για τυχόν x, ένα ανοικτό διάστημα U_x που περιείχε το x και στο οποίο η f ήταν φραγμένη. Παρατηρήσαμε ότι θα μας συνέφερε να επικαλύπτονται αυτά τα διαστήματα. Ίσως να μην χρειάζεται μεγάλη φαντασία για να παρατηρήσει κάποιος ότι, αν μπορούσαμε να καλύψουμε το $[0,1]$ χρησιμοποιώντας πεπερασμένα το πλήθος από αυτά τα διαστήματα, τότε θα είχαμε τελειώσει. Όσο για το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, αυτό εμφανίζεται φυσιολογικά αν κάποιος προσπαθήσει να αποδείξει το αποτέλεσμα με απαγωγή σε άτοπο. Τι σημαίνει το να μην είναι φραγμένη η f; Σημαίνει ότι για κάθε n υπάρχει x_n ώστε $f(x_n) > n$. Τότε, προσπαθούμε να κάνουμε κάτι με αυτή την ακολουθία. Δεν μπορούμε να οδηγηθούμε σε αντίφαση από μία μόνο μεγάλη τιμή $f(x_n)$ – πρέπει με κάποιον τρόπο να τις χρησιμοποιήσουμε όλες μαζί.

Ένας άλλος τρόπος για να φτάσουμε στο θεώρημα Heine-Borel θα ήταν να ξεκινήσουμε από το «επιχείρημα της επέκτασης διαστημάτων» και να επεξεργαστούμε τους συλλογισμούς που ήδη χρησιμοποιήσαμε. Το βασικό λήμμα που χρησιμοποιούσαμε συνεχώς ήταν ότι κάθε x περιέχεται σε κάποιο ανοικτό διάστημα U_x στο οποίο η f είναι φραγμένη. Προσπαθήσαμε να κολλήσουμε όλα τα διαστήματα μαζί, συναντώντας προβλήματα αν είχαμε άπειρα τέτοια διαστήματα, κάτι που τελικά ξεπεράσαμε επιστρέφοντας σε πεπερασμένα από αυτά. Είναι φανερό ότι αυτό που προσπαθούσαμε να κάνουμε ήταν να καλύψουμε το $[0,1]$ με πεπερασμένα το πλήθος U_x. Από αυτό το σημείο μέχρι να σκεφτείς τη διατύπωση του θεωρήματος Heine-Borel, η απόσταση δεν είναι πολύ μεγάλη.