Ένας τρόπος για να φτάσετε στον ορισμό της συνεχούς συνάρτησης

W. T. Gowers

Αν βλέπετε τον ορισμό που ακολουθεί για πρώτη φορά, είναι μάλλον δύσκολο να τον χωνέψετε αμέσως:

> Η f είναι *συνεχής* στο σημείο x αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$ οποτεδήποτε $|z - x| < \delta$.

Ο ορισμός συνήθως παρουσιάζεται ως ο αυστηρός τρόπος για να περιγράψουμε την διαισθητική μας ιδέα ότι συνεχής είναι μια συνάρτηση που μπορούμε να σχεδιάσουμε την γραφική της παράσταση χωρίς να χρειαστεί να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί. Την ίδια στιγμή, σε ένα εισαγωγικό μάθημα ανάλυσης δίνονται συνήθως κάποια κλασικά παραδείγματα παράξενων συναρτήσεων που δείχνουν ότι ο αυστηρός και ο διαισθητικός ορισμός δεν συμπίπτουν απολύτως. Για παράδειγμα, υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε κάθε άρρητο x και ασυνεχείς σε κάθε ρητό x. Είναι εντελώς αδύνατο να αντιληφθεί κανείς διαισθητικά αυτήν την πρόταση σχεδιάζοντας την γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης.

Είναι ίσως ευκολότερο να ξεχάσουμε εντελώς τις γραφικές παραστάσεις, και να ξεκινήσουμε με ένα διαφορετικό σύνολο διαισθητικών ιδεών, που έχουν ως βάση τους τον τρόπο με τον οποίο κάνουμε μετρήσεις στην πραγματική ζωή. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κάποια φυσική ποσότητα y η οποία εξαρτάται με κάποιον τρόπο από μια άλλη φυσική ποσότητα x. Για παράδειγμα, ας πούμε ότι x είναι ο αριθμός των δευτερολέπτων που έχουν περάσει από τη στιγμή που αφήσαμε μια πέτρα από την κορυφή ενός ψηλού κτιρίου και y είναι τα μέτρα που έχει διανύσει η πέτρα από τη στιγμή που την αφήσαμε. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε την ποσότητα y, αυτό όμως που μπορούμε πρακτικά να μετρήσουμε είναι η ποσότητα x. Στο παράδειγμα που δώσαμε, φανταστείτε ότι είναι νύχτα. Θέλουμε να ξέρουμε πόσα μέτρα έχει κάνει η πέτρα, αλλά δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε την πέτρα γιατί είναι σκοτεινά. Στοιχειώδης όμως φυσική μας λέει ότι $y = \frac{1}{2}gx^2$, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας (αγνοούμε την αντίσταση του αέρα κλπ.) οπότε θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ένα χρονόμετρο: να προσδιορίσουμε το x και μετά να *υπολογίσουμε* το y.

Ένα πρόβλημα με αυτό είναι ότι, ώσπου να κάνουμε τον υπολογισμό, η πέτρα μπορεί να έχει φτάσει στο έδαφος. Αν όμως είμαστε πολύ εφευρετικοί, θα μπορούσαμε να προγραμματίσουμε στον υπολογιστή ένα διάγραμμα του κτιρίου και μια κουκίδα που να δείχνει τη θέση της πέτρας, και θα το κάναμε με τέτοιον τρόπο που να μπορούμε πραγματικά να δούμε τη θέση της πέτρας ως τη στιγμή που έπεσε στο έδαφος.

Πολύ πιο σημαντική από την άποψη της συνέχειας είναι η εξής (πολύ βασική) παρατήρηση: οι μετρήσεις φυσικών μεγεθών δεν είναι πραγματικοί αριθμοί. Δηλαδή, η μέτρηση μιας φυσικής ποσότητας δεν μπορεί να είναι ένας απολύτως ακριβής δεκαδικός αριθμός με άπειρα ψηφία. Στην πράξη, θα δίνεται στη μορφή ενός δεκαδικού αριθμού με πεπερασμένα ψηφία, μαζί με κάποια εκτίμηση σφάλματος: $x = 3.14$ (0.02) ή κάτι τέτοιο.

Στο παράδειγμα της πέτρας, το γεγονός ότι δεν μπορούμε να είμαστε απολύτως ακριβείς δεν μας πειράζει και τόσο. Ο υπολογιστής μπορεί να έχει στη διάθεση του ένα χρονόμετρο που να έχει ακρίβεια ενός πολύ μικρού κλάσματος του δευτερολέπτου, και η ευκρίνεια της οθόνης μπορεί να είναι τόσο καλή που η θέση της κουκίδας να δείχνει τη θέση της πέτρας με όση ακρίβεια επιθυμούμε. Ο ορισμός της συνέχειας κάνει την εμφάνιση του όταν αρχίσουμε να αναρωτιόμαστε *γιατί* μικρές ανακρίβειες δεν δημιουργούν προβλήματα.

Εδώ πρέπει να προσέξουμε και να διαχωρίσουμε δύο διαφορετικές πτυχές του ερωτήματος. Η μία είναι γιατί μπορούμε να αγνοήσουμε μικρές ανακρίβειες στο y (την θέση) και η άλλη είναι γιατί μπορούμε να ανεχθούμε μικρές ανακρίβειες στο x (τον χρόνο). Το πρώτο ερώτημα δεν είναι μαθηματικής φύσης. Δεν μας ενοχλεί να γνωρίζουμε το y με ακρίβεια «μόνο» δεκαπέντε δεκαδικών ψηφίων γιατί δεν έχουμε την δυνατότητα να ανιχνεύσουμε διαφορές της τάξης του 10^{-15} στο y. Θα μπορούσαμε να πάμε ακόμα πιο πέρα και να πούμε ότι δεν είναι καν προφανές τι *εννοούμε* όταν μιλάμε για την θέση μιας πέτρας (η οποία στο κάτω-κάτω καταλαμβάνει αρκετό χώρο) με ακρίβεια της τάξης του 10^{-15}. Μιλάμε για το κέντρο βάρους της; Αυτό δεν λύνει όλα μας τα προβλήματα, γιατί πρέπει στη συνέχεια να αποφασίσουμε που βρίσκεται το σύνορο της πέτρας - δηλαδή, τι μετράει σαν πέτρα και τι όχι. Στην κλίμακα του 10^{-15}, είναι μάλλον δύσκολη απόφαση.

Η δεύτερη ερώτηση είναι πιο ενδιαφέρουσα από μαθηματική άποψη – γιατί μικρές ανακρίβειες στο x δεν προκαλούν προβλήματα; Θυμηθείτε ότι αυτό που μας ενδιαφέρει πραγματικά είναι το y, οι περιστάσεις όμως μας υποχρεώνουν να το υπολογίσουμε εμμέσως, μετρώντας το x. Βρισκόμαστε λοιπόν στην εξής κατάσταση:

- Θέλουμε να ξέρουμε το y.
- Δεν μας ενοχλεί να ξέρουμε το y με κάποιο μικρό σφάλμα.
- Μπορούμε να μετρήσουμε το x με αρκετή ακρίβεια, όχι όμως τέλεια.
- Έχουμε μια επιστημονική θεωρία που μας λέει με ποιόν τρόπο εξαρτάται το y από το x.

Ας γράψουμε $y = f(x)$. Η επιστημονική θεωρία μας λέει ποιά είναι η f στη συγκεκριμένη περίπτωση. Για την πέτρα, η $f(x)$ ήταν $\frac{1}{2}gx^2$. Αν είμαστε αναγκασμένοι να κάνουμε κάποιο μικρό σφάλμα στη μέτρηση του x, μπορούμε όμως να ανεχθούμε κάποιο μικρό σφάλμα στο y, τότε το επόμενο ερώτημα γίνεται εξαιρετικά σημαντικό: ποιά επίδραση έχει στο y μια μικρή μεταβολή του x;

Για να κάνουμε αυτό το ερώτημα ακόμα πιο ακριβές, ας υποθέσουμε ότι χρειαζόμαστε να ξέρουμε το y για κάποιον πρακτικό λόγο, και μας λένε ότι είναι ζωτικής σημασίας να είμαστε ακριβείς στο y μέχρι τα πρώτα πέντε σημαντικά ψηφία. Μπορούμε να το εγγυηθούμε (υποθέτοντας βεβαίως ότι η επιστημονική θεωρία μας είναι ορθή) αν είμαστε σε θέση να μετρήσουμε το x με αρκετή ακρίβεια;

Δύο παραδείγματα σε αντιδιαστολή

Στην περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2}gx^2$, η απάντηση είναι καταφατική. Ας δούμε τι θα συμβεί αν διαταράξουμε ελαφρώς το x, αν δηλαδή το αντικαταστήσουμε με το $x+h$, όπου το h είναι πολύ μικρό (και ίσως αρνητικό). Βλέπουμε ότι

$$f(x+h) = \frac{1}{2}g(x^2 + 2xh + h^2).$$

Αν το h είναι αρκετά μικρό, τότε τόσο το $2xh$ όσο και το h^2 θα είναι μικρότερα από 10^{-7}. Με άλλα λόγια, αν μετρήσουμε το x με αρκετή ακρίβεια, τότε θα πετύχουμε ακρίβεια της τάξης του 10^{-5} στο $f(x)$. Τώρα, είναι εντελώς προφανές ότι δεν υπάρχει τίποτα το ιδιαίτερο στον αριθμό 10^{-5}. Θα μπορούσαμε να τον έχουμε αντικαταστήσει με *οποιονδήποτε* άλλον θετικό αριθμό. Επομένως, έχουμε την εξής πρόταση.

> Αν μας ζητήσουν οποιαδήποτε ακρίβεια για τον $y = f(x)$, μπορούμε να εγγυηθούμε αυτήν την ακρίβεια αρκεί να μετρήσουμε τον x με επαρκή ακρίβεια.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διαφορετικό φυσικό πρόβλημα. Φανταστείτε ότι έχουμε μια ράβδο που το ένα της άκρο είναι στερεωμένο στο έδαφος, με ένα μεντεσέ, έτσι ώστε η ράβδος να μπορεί να κινείται ελεύθερα σε κάποιο κατακόρυφο επίπεδο. Η θέση της ράβδου προσδιορίζεται από τη γωνία που σχηματίζει με τον κατακόρυφο άξονα, μπορεί λοιπόν να μεταβάλλεται από -90 (όταν η ράβδος είναι πεσμένη στο έδαφος δείχνοντας αριστερά μας) ως 0 (όταν η ράβδος είναι κατακόυφη) και ως 90 (όταν η ράβδος είναι πεσμένη στο έδαφος δείχνοντας δεξιά μας). Ας υποθέσουμε ότι ο μεντεσές είναι πολύ καλά λαδωμένος, και ας εκτελέσουμε το εξής απλό πείραμα. Αρχικά, κρατάμε τη ράβδο ακίνητη σε κάποια θέση, και μετά την αφήνουμε ελεύθερη. Αν η ράβδος κινηθεί, περιμένουμε ώσπου να σταματήσει και καταγράφουμε τη θέση της.

Έστω x η αρχική θέση της ράβδου, η οποία δίνεται από τη γωνία που σχηματίζει με τον κατακόρυφο άξονα, και έστω y η θέση της όταν σταματήσει. Παρατηρήστε ότι το y μπορεί να πάρει μόνο τρεις τιμές (αν ο μεντεσές δεν έχει τριβή): -90, 0 ή 90. Για την ακρίβεια, παίρνει την τιμή -90 αν το x είναι αρνητικό (αν η ράβδος γέρνει αριστερά τότε πέφτει αριστερά), 0 αν $x = 0$, και 90 αν το x είναι θετικό (αν η ράβδος γέρνει δεξιά τότε πέφτει δεξιά). Γράφοντας $y = h(x)$ έχουμε ότι το $h(x)$ είναι -90 αν το x είναι αρνητικό, 0 αν $x = 0$, και 90 αν το x είναι θετικό.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε τη γωνία x ακριβώς και θέλουμε να ξέρουμε το y με αρκετή ακρίβεια. Αν το x γέρνει ευδιάκριτα, τότε μπορούμε να το πετύχουμε. Για παράδειγμα, αν $x = -10$ (δηλαδή αν το x γέρνει 10 μοίρες αριστερά) τότε η ράβδος πέφτει αριστερά, άρα $y = -90$. Ακόμα κι αν η μέτρηση μας είχε ακρίβεια μιας μοίρας, ο υπολογισμός μας θα εξακολουθούσε να είναι σωστός, αφού όλοι οι αριθμοί μεταξύ του -11 και του -9 είναι αρνητικοί.

Από την άλλη πλευρά, θα έχουμε πρόβλημα αν $x = 0$. Αν συμβεί η ράβδος να είναι ακριβώς κατακόρυφη, δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα πού θα καταλήξει, αφού, λόγω της αδυναμίας μας να μετρήσουμε με άπειρη ακρίβεια, δεν *ξέρουμε* ότι η ράβδος είναι κατακόρυφη. Αν υπάρχει η παραμικρή κλίση προς τα αριστερά, τότε θα πέσει (ίσως μετά από πολλή ώρα) στα αριστερά, και όμοια για τη δεξιά πλευρά.

Μιλώντας από τη σκοπιά της φυσικής, κάναμε κάποιες εξωπραγματικές παραδοχές, όπως ο μεντεσές που δεν παρουσιάζει τριβή ή η απουσία μικρών δονήσεων που μπορούν να επηρρεάσουν το πείραμα. Μιλώντας όμως από τη σκοπιά των μαθηματικών, μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση h έχει την εξής ιδιότητα (και η συνάρτηση που θα προέκυπτε από ένα πιο ρεαλιστικό φυσικό μοντέλο θα είχε κατά προσέγγιση την ίδια ιδιότητα).

> Αν το μόνο που ξέρουμε για το x είναι ότι βρίσκεται πολύ κοντά στο μηδέν, τότε δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το $h(x)$ με ακρίβεια 10 μοιρών. Δηλαδή, αν ξέρουμε ότι το x βρίσκεται μεταξύ του $-\delta$ και του δ, τότε, όσο μικρό κι αν είναι το δ, δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή του $h(x)$.

Ο ορισμός της συνέχειας

Η διαφορά ανάμεσα στις συναρτήσεις f και h που συζητήσαμε πιο πάνω είναι ότι η f είναι συνεχής ενώ η h είναι ασυνεχής. Σε αδρές γραμμές, αυτό σημαίνει ότι μικρές μεταβολές στο x μπορούν να προκαλέσουν μικρές μόνο μεταβολές στο $f(x)$, ενώ μπορούν να προκαλέσουν μεγάλες μεταβολές στο $h(x)$ αν το x είναι κοντά στο μηδέν. Πώς περνάμε από αυτήν την ιδέα στον γνωστό $\varepsilon - \delta$ ορισμό;

Έχουμε ήδη πεί πολλές φορές ότι θέλουμε να ξέρουμε το $f(x)$ με κάποια - δεδομένη - ακρίβεια. Πώς μπορούμε να το αναπαραστήσουμε μαθηματικά; Πρέπει να επιλέξουμε το σφάλμα το οποίο είμαστε προετοιμασμένοι να ανεχθούμε. Ας ονομάσουμε αυτόν τον αριθμό ε. Ελπίζουμε τότε ότι προσδιορίζοντας το x με αρκετή ακρίβεια, μπορούμε να προσδιορίσουμε το $f(x)$ με σφάλμα μικρότερο από ε. Τι εννοούμε με τη φράση «αρκετή ακρίβεια»; Εννοούμε ότι υπάρχει κάποιο σφάλμα, ας το πούμε δ, στον προσδιορισμό του x, το οποίο είναι αρκετά μικρό ώστε αν γνωρίζουμε το x με σφάλμα μικρότερο από δ να μπορούμε να βρούμε το $f(x)$ με σφάλμα μικρότερο από ε. Δηλαδή, αν z είναι κάποιος αριθμός για τον οποίο $|z-x| < \delta$ τότε ο $f(z)$ προσεγγίζει τον $f(x)$ με ακρίβεια της τάξης του ε – με άλλα λόγια, $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$.

Θυμηθείτε τώρα ότι αυτό θέλαμε να μπορούμε να το πετύχουμε για κάθε δεδομένο περιθώριο σφάλματος ε στην ποσότητα $f(x)$. Με άλλα λόγια, θέλαμε, όση ακρίβεια ε κι αν απαιτηθεί για το $f(x)$, αν το δ είναι αρκετά μικρό, γνωρίζοντας το x με σφάλμα μικρότερο από δ να γνωρίζουμε το $f(x)$ με σφάλμα μικρότερο από ε. Μπορούμε τώρα να γράψουμε έναν ακριβή ορισμό: λέμε

> Η f είναι συνεχής στο x αν για κάθε $\varepsilon > 0$ (αυτή είναι η ακρίβεια που ζητάμε για το $f(x)$) υπάρχει $\delta > 0$ (το σφάλμα που επιτρέπουμε για το x ή, αν θέλετε, η ακρίβεια που είναι αρκετή για το x) ώστε αν $|z-x| < \delta$ τότε $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$.

Ο ορισμός εξακολουθεί ίσως να σας φαίνεται πολύπλοκος. Όπως όμως έχω ήδη πεί, είναι απλώς η μαθηματική τυποποίηση της ακόλουθης ιδέας: σε έναν κόσμο όπου η απόλυτη ακρίβεια δεν είναι ούτε αναγκαία ούτε δυνατή, μπορούμε να προσδιορίσουμε το $f(x)$ με *οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια* μας ζητήσουν, αρκεί να καταφέρουμε να προσδιορίσουμε το x με επαρκή ακρίβεια.

Ένας άλλος τρόπος θεώρησης

Ας δούμε τώρα έναν εναλλακτικό τρόπο για να σκεφτόμαστε τη συνέχεια. Δεν είναι πολύ διαφορετικός από αυτόν που ήδη περιέγραψα, είναι όμως αρκετά διαφορετικός ώστε να αξίζει να τον αναφέρουμε. Φανταστείτε ότι έχετε έναν πολύ ισχυρό υπολογιστή που είναι σε θέση να χειριστεί πολύ μακριά δεκαδικά αναπτύγματα: αν του πείτε ότι θέλετε να δουλέψετε με n δεκαδικά ψηφία, ο υπολογιστής θα ανταποκριθεί ευχαρίστως στο αίτημα σας, όσο μεγάλο κι αν είναι το n. Το μόνο πράγμα που δεν μπορεί, φυσικά, να κάνει είναι να χειριστεί *άπειρα* δεκαδικά αναπτύγματα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλετε να γράψετε κάποια προγράμματα για τον υπολογισμό κάποιων συναρτήσεων, και ότι θέλετε να μπορείτε να υπολογίσετε αυτές τις συναρτήσεις με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια. Αν πάρετε μια συνάρτηση σαν την x^2, μπορείτε να γράψετε ένα πρόγραμμα που θα είναι κάπως έτσι: δίνουμε το n (το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που μας ενδιαφέρει), δίνουμε τα πρώτα n σημαντικά ψηφία του x, υπολογίζουμε το τετράγωνο y του πεπερασμένου (αλλά με πολλά ψηφία) δεκαδικού αναπτύγματος που προκύπτει, και παίρνουμε τον y, περικεκομμένο στο n-οστό σημαντικό του ψηφίο. Εδώ, το αποτέλεσμα είναι πολύ κοντά στην ακριβή τιμή του x^2 γιατί ο δεκαδικός αριθμός που δόθηκε στον υπολογιστή ήταν πολύ κοντά στον x.

Αντιθέτως, αν ορίσουμε μια συνάρτηση $f(x)$ θέτοντας $f(x) = 0$ αν ο x είναι μικρότερος από π και $f(x) = 1$ αν ο x είναι μεγαλύτερος ή ίσος από π, τότε δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα ικανοποιητικό πρόγραμμα που να υπολογίζει την f. Αν ο x δεν είναι κοντά στον π, τότε μπορούμε φυσικά να υπολογίσουμε τον $f(x)$ εύκολα. Την τιμή όμως $f(\pi)$ δεν μπορούμε ούτε καν να την *προσεγγίσουμε* αν δεν διαθέτουμε άπειρη ακρίβεια. Γιατί αυτό; Διότι, όσα σημαντικά ψηφία του π κι αν δώσετε στον υπολογιστή σας, δεν θα μπορέσετε να του προσδιορίσετε αν ο αριθμός για τον οποίο μιλάτε είναι μικρότερος από τον π ή μεγαλύτερος ή ίσος από τον π, οπότε το μόνο που θα μπορεί να σας πεί είναι ότι είτε $f(x) = 0$ ή $f(x) = 1$, κι αυτή δεν μπορεί να θεωρηθεί καλή προσέγγιση. Αυτό δεν μας εκπλήσσει καθόλου – εκφράζει απλώς το γεγονός ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο π.