Είναι λάθος να σκεφτόμαστε τους πραγματικούς αριθμούς σαν δεκαδικούς αριθμούς με άπειρα ψηφία;

W. T. Gowers

Ένας από τους πρώτους στόχους όλων σχεδόν των εισαγωγικών μαθημάτων της Ανάλυσης είναι να μάθουν οι φοιτητές να μην σκέφτονται τους πραγματικούς αριθμούς σαν δεκαδικούς αριθμούς με άπειρα ψηφία και, αντί γι' αυτό, να τους βλέπουν σαν στοιχεία του μοναδικού πλήρως διατεταγμένου σώματος, η ύπαρξη του οποίου αποδεικνύεται μέσω των τομών του Dedekind ή των ακολουθιών Cauchy με όρους ρητούς αριθμούς. Θα ήθελα να υποστηρίξω εδώ ότι δεν υπάρχει *τίποτα* το εσφαλμένο στο να τους σκεφτόμαστε σαν «άπειρα δεκαδικά αναπτύγματα». Αντιθέτως, αν το κάνουμε, πολλά από τα παραδοσιακά επιχειρήματα της Ανάλυσης γίνονται πιο διαισθητικά, παρόλο που χάνουν σε κομψότητα. Η κομψότητα είναι ασφαλώς μεγάλο πλεονέκτημα, δεν είναι λοιπόν πρόθεση μου να προτείνω ότι ο τρόπος διδασκαλίας των πραγματικών αριθμών στα Πανεπιστήμια πρέπει να αλλάξει. Είναι όμως καλό να δούμε πώς η καθιερωμένη αντιμετώπιση τους συνδέεται με, και προκύπτει από, κάποιες πιο «απλοϊκές» ιδέες. Σαν παραδείγματα θα φέρω την ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας του δύο και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

1. Κατασκευή των πραγματικών αριθμών μέσω δεκαδικών αναπτυγμάτων.

Θυμηθείτε ότι για να «κατασκευάσουμε» τους πραγματικούς αριθμούς πρέπει να δώσουμε ένα παράδειγμα πλήρως διατεταγμένου σώματος. Για το σκοπό αυτό μπορούμε να υποθέσουμε γνωστή την ύπαρξη των ρητών αριθμών (αυτοί κατασκευάζονται από τους θετικούς ακεραίους, οι οποίοι, αν θέλετε, κατασκευάζονται από τα σύνολα) και κάποιες έννοιες, όπως αυτή της άπειρης ακολουθίας, οι οποίες δεν είναι εντελώς τετριμμένες αλλά είναι κατά κάποιον τρόπο πιο στοιχειώδεις.

Όπως θα δούμε, τα δεκαδικά αναπτύγματα δίνουν μια πολύ καλή και εύληπτη κατασκευή των πραγματικών αριθμών. Υπάρχουν κάποιες ενοχλητικές λεπτομέρειες, όπως η ανάγκη να μεταφέρουμε ψηφία ή να ταυτίζουμε τον $0.9999999\ldots$ με τον 1. Επίσης, υπάρχει κάτι το μυστηριώδες σε σχέση με την επιλογή του αριθμού 10 (όπως και με την προτίμηση μας σε οποιονδήποτε άλλο αριθμό, αν και ο 2 θα ήταν ίσως η καλύτερη επιλογή). Για τους λόγους αυτούς, η κατασκευή μας δεν είναι αισθητικά άρτια όπως κάποιες άλλες. Έχει όμως το πλεονέκτημα, για τους αρχάριους, ότι βρίσκεται πιο κοντά στην εικόνα που ήδη έχουν για τους πραγματικούς αριθμούς.

Για να ξεκινήσουμε, ορίζουμε τον δεκαδικό αριθμό με τον προφανή τρόπο, σαν μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχείων του συνόλου $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ η οποία ακολουθείται από μια υποδιαστολή και από μια άπειρη ακολουθία στοιχείων του συνόλου $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Ο ορισμός δεν είναι ακόμα πλήρης, αφού πρέπει να διευκρινίσουμε ότι μερικά από αυτά τα αντικείμενα ταυτίζονται: για παράδειγμα, ο $0124.383478\ldots$ είναι ο ίδιος αριθμός με τον $124.383478\ldots$ (αν βεβαίως υποθέσουμε ότι οι ακολουθίες συνεχίζουν με τον ίδιο τρόπο) και ο $1.99999999\ldots$ είναι ο ίδιος αριθμός με τον 2. (Παρεπιπτόντως, για το τελευταίο αυτό παράδειγμα, δεν έχει νόημα να φέρετε αντιρρήσεις, αφού δίνω *ορισμό*. Μπορώ να δώσω όποιον ορισμό θέλω, και είναι επιλογή μου να ορίσω ρητά ότι $1.99999999\ldots = 2$ και ότι το ίδιο ισχύει οποτεδήποτε ο αριθμός μου «καταλήγει» σε μια άπειρη αλυσίδα από εννιάρια).

Έχω λοιπόν ορίσει το σύνολο των αριθμών μου. Για να το κάνω πλήρως διατεταγμένο σώμα, πρέπει να ορίσω την διάταξη, να εξηγήσω πώς προσθέτω και πώς πολλαπλασιάζω δεκαδικούς αριθμούς, και να αποδείξω ότι τα αξιώματα του σώματος, τα αξιώματα της διάταξης και το αξίωμα της πληρότητας ικανοποιούνται όλα. Το πρώτο ερώτημα λοιπόν είναι: πώς προσθέτουμε δύο δεκαδικά αναπτύγματα; Η απάντηση είναι απλή, για να την εξηγήσω όμως πρέπει να εισάγω κάποιον συμβολισμό. Αν μου δώσουν έναν δεκαδικό αριθμό x, θα γράφω $x(n)$ για τον *πεπερασμένο* δεκαδικό αριθμό που προκύπτει αν περικόψω τον x στην n-οστή θέση μετά την υποδιαστολή. Για παράδειγμα, αν ο x είναι η τετραγωνική ρίζα του δύο, τότε $x(1) = 1.4$, $x(2) = 1.41$ και $x(3) = 1.414$. Αν και δεν έχει ιδιαίτερη σημασία, ας συμφωνήσουμε ότι αν ο x γράφεται με δύο τρόπους, είτε σαν δεκαδικός που καταλήγει σε μια άπειρη αλυσίδα από εννιάρια ή σαν δεκαδικός που καταλήγει σε μια άπειρη αλυσίδα από μηδενικά, τότε προτιμούμε τα εννιάρια – μόνο και μόνο για να μην υπάρχει αμφιβολία για τον τρόπο ορισμού του $x(n)$.

Για να προσθέσουμε τους x και y, το πρώτο μας βήμα είναι να θεωρήσουμε την ακολουθία των πεπερασμένων δεκαδικών αναπτυγμάτων $x(1) + y(1)$, $x(2) + y(2)$, $x(3) + y(3)$ και τα λοιπά. Ας δούμε τι συμβαίνει αν επιλέξουμε $x = y = \pi = 3.141592653589793\ldots$. Τότε, οι πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι οι

6.2, 6.28, 6.282, 6.2830, 6.28318, 6.283184, 6.2831852, 6.28318530, 6.283185306, 6.2831853070, 6.28318530716, 6.283185307178, 6.2831853071794, 6.28318530717958, 6.283185307179586, ….

Τώρα, αν μας δώσουν έναν όρο αυτής της ακολουθίας, δεν μπορούμε πάντα να προχωρήσουμε στον επόμενο με απλή προσθήκη ενός ψηφίου στο τέλος, γιατί μερικές φορές πρέπει να τροποποιήσουμε ένα ή περισσότερα από τα προηγούμενα ψηφία. Για παράδειγμα, μετά από τον 6.282 δεν ήρθε ο $6.282t$ για κάποιο ψηφίο t, αλλά ο 6.2830. Είναι όμως μια απλή άσκηση να δείξετε ότι, στην διάρκεια της διαδικασίας, *κανένα ψηφίο δεν τροποποιείται περισσότερες από μία φορές*. Ο κανόνας λοιπόν για να προσδιορίσουμε τον δεκαδικό αριθμό $x + y$ είναι ο εξής. Το n-οστό ψηφίο του $x + y$ είναι το n-οστό ψηφίο του $x(n) + y(n)$, εκτός αν τροποποιηθεί κάποια στιγμή αργότερα, οπότε είναι το n-οστό ψηφίο του $x(m) + y(m)$, όπου $m > n$ είναι η πρώτη (και μοναδική) στιγμή κατά την οποία το n-οστό ψηφίο μεταβάλλεται.

Μπορούμε να απλουστεύσουμε αυτήν την περιγραφή αν ορίσουμε μια έννοια ορίου, κατάλληλη για το πλαίσιο στο οποίο δουλεύουμε. Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι είναι εύκολο να ορίσουμε διάταξη για τους δεκαδικούς αριθμούς. Ο x είναι μικρότερος από τον y αν ο $x(n)$ είναι μικρότερος από τον $y(n)$ για κάποιον n. (Εδώ έχει σημασία το ότι έχουμε ορίσει καλά τον $x(n)$). Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια μη-φθίνουσα ακολουθία $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ από δεκαδικούς αριθμούς (αν τα αναπτύγματα τους είναι πεπερασμένα μπορούμε να τα κάνουμε άπειρα προσθέτοντας μηδενικά στο τέλος). Τότε, για κάθε n η ακολουθία $(x_1(n), x_2(n), x_3(n), \ldots)$ είναι κι αυτή μη-φθίνουσα. (Είναι η ίδια ακολουθία με την προηγούμενη, έχουμε όμως περικόψει τα πάντα στο n-οστό δεκαδικό ψηφίο.) Αυτή η ακολουθία, είτε θα μεταβάλλεται άπειρες φορές, οπότε είναι φανερό ότι η ακολουθία $(x_1(n), x_2(n), x_3(n), \ldots)$ δεν είναι φραγμένη, άρα και η $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, ή θα μεταβάλλεται πεπερασμένες το πλήθος φορές, οπότε τελικά σταματάει να μεταβάλλεται και γίνεται ένα σταθερό πεπερασμένο δεκαδικό ανάπτυγμα που τερματίζεται στην n-οστή θέση. Άρα, για κάθε φραγμένη μη-φθίνουσα ακολουθία $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ όλες οι ακολουθίες $(x_1(n), x_2(n), x_3(n), \ldots)$ είναι τελικά σταθερές. Αν ορίσουμε σαν $y(n)$ εκείνο το πεπερασμένο δεκαδικό ανάπτυγμα στο οποίο τελικά σταθεροποιείται η $(x_1(n), x_2(n), x_3(n), \ldots)$, τότε για κάθε $m > n$ η ακολουθία $y(m)$ ξεκινάει με την ακολουθία $y(n)$. Επομένως, τα πεπερασμένα δεκαδικά αναπτύγματα $y(1), y(2), \ldots$ είναι τα αρχικά κομμάτια κάποιου δεκαδικού αριθμού y. Αυτός ο y λέμε ότι είναι το όριο της $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

Ο παραπάνω ορισμός ουσιαστικά περιέχει μια απόδειξη του ισχυρισμού ότι το αξίωμα της πληρότητας ισχύει για τους δεκαδικούς αριθμούς, στη μορφή του ότι μονότονες και φραγμένες ακολουθίες συγκλίνουν. (Αυτό που δεν έχω κάνει είναι να δείξω ότι η παραπάνω έννοια ορίου συμφωνεί με την συνηθισμένη. Αυτό όμως δεν είναι πολύ δύσκολο.) Τώρα, μπορώ πολύ απλά να ορίσω το άθροισμα $x + y$ σαν το όριο της φραγμένης μη-φθίνουσας ακολουθίας $x(1) + y(1)$, $x(2) + y(2)$, $x(3) + y(3)$, $\ldots$. (Για την ακρίβεια, μπορεί μερικές φορές να φθίνει αν κάποιος από τους x και y είναι αρνητικός. Για δοσμένους αρνητικούς αριθμούς θα μπορούσαμε να προσθέσουμε δύο ακεραίους ώστε να τους κάνουμε θετικούς, να προσθέσουμε εκείνους τους νέους αριθμούς και μετά να αφαιρέσουμε ξανά τους δύο ακεραίους. Δείτε πιο κάτω για μια διαφορετική σύμβαση.)

Πώς θα μπορούσαμε τώρα να δείξουμε ότι η πρόσθεση είναι προσεταιριστική και μεταθετική; Είναι πολύ εύκολο: για παράδειγμα, οι ακολουθίες $(x(1) + y(1), x(2) + y(2), x(3)+y(3), \ldots)$ και $(y(1)+x(1), y(2)+x(2), y(3)+x(3), \ldots)$ είναι ίσες, επομένως έχουν το ίδιο όριο. Παρόμοια παρατήρηση δικαιολογεί την προσεταιριστικότητα. Είναι φανερό ότι ο 0 είναι ουδέτερο στοιχείο. Η ύπαρξη αντιθέτων είναι λίγο πιο πολύπλοκη λόγω των προβλημάτων που προκύπτουν όταν χειριζόμαστε αρνητικούς αριθμούς. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε όρια για πιο γενικές ακολουθίες από τις αύξουσες. Προτιμώ να ορίζω τα άπειρα δεκαδικά αναπτύγματα ως εξής: ξεκινάμε με έναν ακέραιο k (θετικό ή αρνητικό) και προσθέτουμε μια υποδιαστολή και μετά μια άπειρη αλυσίδα s που αποτελείται από αριθμούς από τον 0 ως τον 9. Αυτό αναπαριστά τον αριθμό $k + 0.s$. Για παράδειγμα, με $(-2).386\ldots$ αναπαριστώ τον αριθμό που άλλος θα έγραφε στη μορφή $-1.613\ldots$. Τότε, ο αντίστροφος του $n.s_1s_2s_3\ldots$ είναι ο $(-(n+1)).t_1t_2t_3\ldots$, όπου κάθε t_i ισούται με $9-s_i$. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξετε ότι το άθροισμα αυτών των δύο αριθμών είναι ο $(-1).9999999\ldots$ που ισούται με μηδέν.

Ο πολλαπλασιασμός ορίζεται με τον ίδιο τρόπο. Για θετικούς x και y ορίζουμε σαν xy το όριο της φραγμένης μη-φθίνουσας ακολουθίας $x(n)y(n)$, και κατόπιν ορίζουμε τον $(-x)y$ να ισούται με $-(xy)$ και τα λοιπά. Για να ζωντανέψουμε λίγο τον ορισμό, ας προσπαθήσουμε να υψώσουμε στο τετράγωνο τον π. Ο ορισμός μας λέει ότι πρέπει να υψώσουμε στο τετράγωνο τον $\pi(n)$ για ολοένα μεγαλύτερα n, και ότι τότε θα δούμε όλο και πιο πολλά ψηφία του δεκαδικού αναπτύγματος να σταθεροποιούνται σταδιακά και να παραμένουν σταθερά. Ας δούμε τις πρώτες τέσσερις τιμές: $\pi(1)^2 = 3.1^2 = 9.61$, $\pi(2)^2 = 3.14^2 = 9.8596$, $\pi(3)^2 = 3.141^2 = 9.865881$, $\pi(4)^2 = 3.1415^2 = 9.86902225$. Αφού $3.1416^2 = 9.86965056$, γνωρίζουμε ήδη ότι τα πρώτα τρία ψηφία μετά την υποδιαστολή έχουν πάρει τις τελικές τιμές τους. Αυτές οι τελικές τιμές είναι εξ ορισμού τα ψηφία του π^2.

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι ο πολλαπλασιασμός που ορίσαμε είναι προσεταιριστικός και μεταθετικός, και ότι ο 1 είναι ουδέτερο στοιχείο. Για μια ακόμα φορά, τα αντίστροφα στοιχεία παρουσιάζουν περισσότερα προβήματα, όχι όμως πολύ περισσότερα. Ας προσπαθήσουμε, πάλι, να κάνουμε τους υπολογισμούς σε μια συγκεκριμένη περίπτωση – για τον π. Ένας φυσιολογικός τρόπος να το κάνουμε θα ήταν παίρνοντας τους αντίστροφους των $\pi(n)$, οι οποίοι θα ήταν άπειρα δεκαδικά αναπτύγματα, και να τους δούμε να συγκλίνουν σταδιακά. Θα παίρναμε μια φθίνουσα, αντί για αύξουσα, ακολουθία, θα ήταν όμως εύκολο να επεκτείνουμε τον ορισμό του ορίου ώστε να αντιμετωπίσουμε αυτήν την διαφορά. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να ορίσουμε σαν $\pi[n]$ το μικρότερο δεκαδικό ανάπτυγμα που είναι μεγαλύτερο από π και τελειώνει στο n-οστό ψηφίο, οπότε η ακολουθία $1/\pi[n]$ θα ήταν τώρα αύξουσα. Μια άλλη δυνατότητα θα ήταν να ορίσουμε σαν $r(n)$ το μεγαλύτερο δεκαδικό ανάπτυγμα που τελειώνει στο n-οστό ψηφίο και ικανοποιεί την ανισότητα $r(n)\pi < 1$. Όλοι αυτοί οι τρόποι δουλεύουν, αν και χρειάζεται κάποια προσπάθεια για να δείξουμε ότι ο αριθμός που προκύπτει στο τέλος δίνει στ' αλήθεια 1 όταν πολλαπλασιαστεί με τον π.

2. Η ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας του δύο.

Ελπίζω, αν και στην συζήτηση που προηγήθηκε δεν δώσαμε πλήρεις αποδείξεις, ότι έχω δώσει αρκετές λεπτομέρειες ώστε να πειστείτε ότι υπάρχουν φυσιολογικοί ορισμοί για την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και την διάταξη των δεκαδικών αριθμών, και ότι με αυτούς τους ορισμούς το σύνολο των δεκαδικών αριθμών γίνεται ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα. Ας δούμε τώρα μια «απλοϊκή» προσέγγιση της ύπαρξης της τετραγωνικής ρίζας του δύο.

Ένας λόγος για τον οποίο φαίνεται προφανές ότι η τετραγωνική ρίζα του δύο υπάρχει, είναι ότι μπορούμε να την υπολογίσουμε σαν δεκαδικό ανάπτυγμα. Αν έχετε βρεί κάποια πρώτα ψηφία, τότε το επόμενο θα είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος από 0 ως 9 για τον οποίο το τετράγωνο του αριθμού που προκύπτει είναι μικρότερο από δύο. Για παράδειγμα, $1.4^2 = 1.96 < 2$ και $1.5^2 = 2.25 > 2$, άρα το πρώτο ψηφίο μετά την υποδιαστολή είναι το 4. Κατόπιν, αφού $1.41^2 < 2$ και $1.42^2 > 2$, βλέπουμε ότι το επόμενο ψηφίο είναι το 1, και ούτω καθεξής.

Θα δείξω τώρα ότι αυτή η ιδέα είναι η βάση για μια πλήρη και σωστή απόδειξη της ύπαρξης της τετραγωνικής ρίζας του δύο. Πρώτα απ' όλα, αν έχουμε ορίσει τους πραγματικούς αριθμούς σαν δεκαδικούς αριθμούς, τότε η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε ορίζει μονοσήμαντα κάποιον πραγματικό αριθμό. Για την ακρίβεια, είναι ο μοναδικός δεκαδικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει το εξής: για κάθε n έχουμε $x(n)^2 < 2$ και $(x(n)+10^{-n})^2 > 2$. Αυτό βεβαίως δεν αποδεικνύει πλήρως ότι ο 2 έχει τετραγωνική ρίζα, γιατί μπορεί το τετράγωνο αυτού του x, που ορίζεται μονοσήμαντα, να μην ισούται με 2.

Σας φαίνεται αστείο; Δεν είναι φανερό ότι το τετράγωνο του x ισούται με 2; Η αλήθεια είναι ότι δεν είναι καθόλου φανερό, δεν είναι όμως και δύσκολο να το αποδείξουμε. Ιδού ένα επιχείρημα που δουλεύει. Αν κοιτάξετε πίσω στον ορισμό του πολλαπλασιασμού δεκαδικών αριθμών, θα δείτε ότι αυτό που πρέπει να δείξουμε είναι ότι, καθώς το n αυξάνει, ο $x(n)^2$ είναι ένας δεκαδικός αριθμός που σχηματίζεται από τον 1 ακολουθούμενο από μια υποδιαστολή ακολουθούμενη από μια αλυσίδα από εννιάρια της οποίας το μληκος αυξάνει στο άπειρο καθώς το n αυξάνει στο άπειρο. Συνεπώς, το τετράγωνο του x θα είναι (εξ ορισμού) ο $1.99999999999\ldots$ ο οποίος (εξ ορισμού) ισούται με 2.

Ας δούμε λοιπόν γιατί μπορεί κανείς να επιλέξει n έτσι ώστε η αλυσίδα των 9 στον $x(n)^2$ να έχει μήκος τουλάχιστον 100. Χοντρικά, το επιχείρημα είναι το εξής. Αν θέσουμε $n = 101$, τότε $x(n)^2 < 2$ ενώ $(x(n) + 10^{-101})^2 > 2$. Όμως, οι $x(n)$ και $x(n) + 10^{-101}$ διαφέρουν μόνο κατά 10^{-101}, απ' όπου έπεται, μετά από έναν σύντομο υπολογισμό, ότι οι $x(n)^2$ και $(x(n) + 10^{-101})^2$ διαφέρουν λιγότερο από 10^{-100}. Από αυτό έπεται ότι $x(n)^2 > 2 - 10^{-100}$, όπως θέλαμε.

Ο σύντομος υπολογισμός πηγαίνει κάπως έτσι: η διαφορά των $(y+c)^2$ και y^2 είναι $2cy + c^2$. Αν $y = x(n) < 2$ και $c < 10^{-101}$, τότε αυτή η ποσότητα είναι μικρότερη από 10^{-100}. Προφανώς, ανάλογος υπολογισμός δείχνει ότι αν θέλετε μια αλυσίδα από m εννιάρια, μπορείτε να το καταφέρετε με τον $x(m + 1)$ (ο οποίος, απλώς για να το θυμίσουμε, είναι το αρχικό κομμάτι του δεκαδικού αναπτύγματος της τετραγωνικής ρίζας του δύο το οποίο παίρνουμε αν σταματήσουμε στο $(m + 1)$-οστό ψηφίο).

3. Συνεχείς συναρτήσεις και δεκαδικοί αριθμοί.

Μία από τις συνηθισμένες αποδείξεις για την ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας του δύο είναι η ακόλουθη. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι συνεχής, έχουμε $f(1) < 2$ και $f(2) > 2$, οπότε από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει x ώστε $f(x) = 2$. Εξετάζοντας την απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής βλέπουμε ότι ταυτόχρονα προσδιορίζει την τιμή του x: είναι το supremum του συνόλου A των πραγματικών αριθμών y που ικανοποιούν την $y^2 < 2$. Κάθε βήμα αυτής της γνωστής απόδειξης έχει το αντίστοιχο του στο επιχείρημα που μόλις έδωσα μέσω των δεκαδικών αριθμών. Ας το δούμε πιο αναλυτικά.

(α) Για να ορίσω τον δεκαδικό αριθμό x, έκανα το δεκαδικό του ανάπτυγμα όσο πιο μεγάλο μπορούσα, φροντίζοντας μόνο ο $x(n)^2$ να είναι μικρότερος από 2. Αυτό αντιστοιχεί φυσιολογικά στο να πάρει κανείς το supremum του συνόλου A που ορίσαμε πιο πάνω. Μπορούμε να κάνουμε την αντιστοιχία ακόμα πιο στενή αν ξαναορίσουμε την έννοια του supremum μέσω των δεκαδικών αριθμών. Για να το κάνουμε αυτό, θεωρούμε τυχόν σύνολο B δεκαδικών αριθμών που να είναι άνω φραγμένο, και ορίζουμε τον αριθμό $x = \sup(B)$ θέτοντας σαν $x(n)$ το μέγιστο των $y(n)$ όπου $y \in B$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ο $x(m)$ είναι αρχικό κομμάτι του $x(n)$ αν $m < n$, όπως θα έπρεπε, και ότι ο δεκαδικός αριθμός x που προκύπτει είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου B (προφανώς ο $x(n)$ πρέπει να είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλος όσο όλοι οι $y(n)$ για να είναι ο x άνω φράγμα, και εξίσου προφανώς, αν, για κάθε n, ο $x(n)$ είναι τόσο μεγάλος όσο όλοι οι $y(n)$, τότε ο x είναι άνω φράγμα). Έτσι, είναι εύκολο να δείξουμε το αξίωμα του ελαχίστου άνω φράγματος για το σώμα που κατασκευάσαμε. Είναι επίσης εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αν ορίσουμε σαν B το σύνολο όλων των δεκαδικών αριθμών που έχουν τετράγωνα μικρότερα από 2, τότε το $\sup(B)$ θα είναι ακριβώς το ίδιο με τον δεκαδικό αριθμό που ορίσαμε νωρίτερα.

(β) Όταν έδειξα ότι μπορούμε να κάνουμε την αλυσίδα των 9 οσοδήποτε μακριά θέλουμε, χρησιμοποίησα το γεγονός ότι μια μεταβολή κάπου αργά στο δεκαδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού x έχει πολύ μικρή επίδραση στην τιμή του x^2. Αυτό είναι ουσιαστικά το ίδιο με το να λέω ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι συνεχής, και ο υπολογισμός που έκανα ήταν ο συνηθισμένος υπολογισμός που απαιτείται για να ελέγξουμε την συνέχεια της f (τουλάχιστον στο διάστημα $1 < x < 2$).

Με την γλώσσα των δεκαδικών αριθμών, ποιά ήταν η ιδιότητα της συνάρτησης $f(x) = x^2$ που επέτρεψε στο επιχείρημα μας να δουλέψει; Ήταν η εξής. Για κάθε δοσμένο m υπάρχει n ώστε, για να υπολογίσουμε την τιμή $f(x)$ με ακρίβεια της τάξης του 10^{-m} να είναι αρκετό να γνωρίζουμε τον x μέχρι το n-οστό ψηφίο μετά την υποδιαστολή – δηλαδή, να γνωρίζουμε τον $x(n)$. Αυτή είναι μια απλή αναδιατύπωση του ορισμού της συνέχειας στην γλώσσα των δεκαδικών αριθμών.

4. Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ορισμό, ας προσπαθήσουμε να αποδείξουμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής κουνώντας τα χέρια. Για το σκοπό αυτό, ας υποθέσουμε ότι f είναι μια συνεχής συνάρτηση από το διάστημα $[a, b]$ στο $\mathbb{R}$, με $f(a) < c$ και $f(b) > c$. Πώς θα μπορούσαμε να προσπαθήσουμε να βρούμε x για το οποίο $f(x) = c$; Γιατί να μην προσπαθήσουμε να το κάνουμε ακριβώς όπως το κάναμε όταν $f(x)$ ήταν η x^2 και c ήταν ο 2; Θα ξεκινούσαμε λοιπόν βρίσκοντας τον μεγαλύτερο δυνατό $x(1)$ για τον οποίο $f(x(1)) < c$, και μετά τον μεγαλύτερο δυνατό $x(2)$ που αρχίζει όπως ο $x(1)$ και ικανοποιεί την $f(x(2)) < c$, και ούτω καθεξής. Αν συνεχίσουμε αυτήν την διαδικασία, καταλήγουμε να κατασκευάσουμε τον μεγαλύτερο δυνατό δεκαδικό αριθμό x

που ικανοποιεί την $f(x(n)) < c$ για κάθε n. (Σημειώστε ότι αυτό μπορεί να μην είναι το supremum του συνόλου όλων των y για τους οποίους $f(y) < c$. Με ένα ελαφρώς διαφορετικό όμως επιχείρημα, μπορούμε να φτάσουμε σε αυτόν τον x.) Ένα απλό επαγωγικό επιχείρημα δείχνει ότι για κάθε n έχουμε $f(x(n)) < c$ και $f(x(n)+10^{-n}) \geq c$. Αφού η f είναι συνεχής, για κάθε m μπορούμε να επιλέξουμε n ώστε οι $f(x(n))$ και $f(x(n) + 10^{-n})$ να απέχουν λιγότερο από 10^{-m} από τον $f(x)$, απ' όπου έπεται ότι ο $f(x)$ απέχει το πολύ 10^{-m} από τον c. Αφού αυτό μπορούμε να το κάνουμε για κάθε m, ο $f(x)$ πρέπει να είναι ίσος με c.

Το επιχείρημα που περιγράψαμε είναι μια ελαφρώς μεταμφιεσμένη έκδοση μιας άλλης συνηθισμένης απόδειξης του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, η οποία χρησιμοποιεί διαδοχικές διχοτομήσεις. (Μπορούμε, φυσικά, να χωρίζουμε τα διαστήματα μας σε δέκα αντί για δύο ίσα κομμάτια.) Το γεγονός ότι μοιάζει επίσης πολύ με την απόδειξη που γίνεται μέσω του supremum του $\{x : f(x) < c\}$ είναι μια ένδειξη για το ότι όλες οι γνωστές αποδείξεις του θεωρήματος είναι, τελικά, βασισμένες στην ίδια απλή και διαισθητική ιδέα.