Ένας διάλογος για την αναγκαιότητα του συστήματος των πραγματικών αριθμών

W. T. Gowers

Όλοι οι φοιτητές που σπουδάζουν Μαθηματικά γνωρίζουν ότι στην «ιεραρχία» των συστημάτων αριθμών $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ (δηλαδή, των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών, των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών) το μεγαλύτερο ποιοτικά «άλμα» εμφανίζεται μεταξύ του $\mathbb{Q}$ και του $\mathbb{R}$. Αν θελήσει κανείς να κατανοήσει σε βάθος τους πραγματικούς αριθμούς, τότε πρέπει να σκεφτεί πάνω στην έννοια του ορίου, ενώ όλα τα άλλα «άλματα» – ακόμα και αυτό από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$ – γίνονται με κάποιους αλγεβρικούς χειρισμούς. Υπάρχει πραγματικά λόγος να κάνουμε όλον αυτόν τον κόπο; Πόσο «πραγματικοί» είναι σε τελική ανάλυση οι πραγματικοί αριθμοί; Στον διάλογο που ακολουθεί συμμετέχουν τρεις φανταστικοί χαρακτήρες: ο **Μ** είναι ένας μαθηματικός που παίρνει τους πραγματικούς αριθμούς σαν κάτι δεδομένο, ο **Σ** είναι ένας σκεπτικιστής που δεν είναι διατεθειμένος να μάθει κάτι αν δεν πειστεί προηγουμένως ότι αυτό είναι απολύτως αναγκαίο, ενώ ο **Φ** είναι ένας προπτυχιακός φοιτητής που πρόσφατα έμαθε τις βασικές αρχές της Ανάλυσης. Προς το τέλος, ένας λογικός (ο **Λ**) προσπαθεί να τακτοποιήσει τη συζήτηση.

Πρώτο Μέρος: Η ανάγκη για ειδικούς πραγματικούς αριθμούς

Σ: Κοιτούσα ένα βιβλίο μαθηματικών σήμερα και είδα ένα σωρό μπερδεμένες ιστορίες για διατεταγμένα σώματα, τομές Dedekind, ακολουθίες Cauchy – ότι κι αν ήταν αυτά. Είναι δυνατόν να χρειάζεται να τα μάθω όλα αυτά μόνο και μόνο για να καταλάβω τους απλούς αριθμούς;

Μ: Εδώ που τα λέμε, οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι τόσο απλοί όσο φαίνονται.

Σ: Αυτό είναι φανερό, αν κρίνω από το βιβλίο που είδα, γιατί όμως να κάνω τον κόπο να ασχοληθώ μαζί τους;

Μ: Τι άλλο θα μπορούσε να γίνει; Οι Έλληνες νόμιζαν ότι θα τα κατάφερναν με τους ρητούς αριθμούς και μετά ανακάλυψαν ότι η τετραγωνική ρίζα του δύο δεν είναι ρητός. Με άλλα λόγια, αν τοποθετήσεις όλα τα ρητά σημεία πάνω σε μια ευθεία, θα ανακαλύψεις ότι έχεις αφήσει κενά.

Σ: Όχι βέβαια, δεν θα έχω αφήσει κανένα.

Μ: Ναι, θα έχεις – για παράδειγμα, δεν θα έχεις συμπεριλάβει τη ρίζα του δύο.

Σ: Μα αυτό δεν είναι «κενό». Είναι ένας μόνο αριθμός που έμεινε απ' έξω.

Μ: Εντάξει, λέγοντας «κενό» δεν εννοούσα ένα ολόκληρο διάστημα που δεν περιέχει κανέναν ρητό αριθμό. Απλώς εννοούσα ότι θα είχες ξεχάσει κάποιους αριθμούς όπως η ρίζα του δύο, καθώς και πολλούς άλλους.

Σ: Μα γιατί είσαι τόσο σίγουρος ότι αυτοί οι αριθμοί υπάρχουν στ' αλήθεια; Μιλάς σαν να ανακάλυψαν οι Έλληνες ένα αντικειμενικά υπαρκτό αντικείμενο, την τετραγωνική ρίζα του δύο, το οποίο δεν είναι ρητός. Όμως, με ποιά έννοια το ανακάλυψαν; Έφτιαξαν ένα ακριβές τετράγωνο και μέτρησαν τη διαγώνιο του; Φυσικά όχι – άπειρη ακρίβεια είναι αδιανόητη. Δεν έχει νόημα να λέμε ότι κάποιο φυσικό αντικείμενο έχει άρρητο μήκος. Μπορεί ο Πλάτωνας να πίστευε σε ένα ιδεατό βασίλειο γεμάτο από τέλεια αντικείμενα, εγώ όμως όχι.

Μ: Ούτε κι εγώ. Συμφωνώ με πολλά απ' όσα λες. Στην πράξη μάλιστα δεν είναι η άπειρη ακρίβεια αυτή που είναι αδύνατη: δεν μπορούμε να μετρήσουμε τίποτα με ακρίβεια μεγαλύτερη από περίπου δεκαπέντε δεκαδικά ψηφία. Όταν δε οι υπολογιστές φτιάχνουν μοντέλα για φυσικές καταστάσεις, αρκούνται στους ρητούς αριθμούς για να τις προσεγγίσουν. Νομίζω όμως ότι παρεξηγείς τη σχέση των μαθηματικών με τη φυσική. Ο λόγος για τον οποίο εισάγουμε τους πραγματικούς αριθμούς δεν είναι επειδή κάποια φυσικά αντικείμενα έχουν άρρητα μήκη. Το κάνουμε γιατί μας δίνουν ένα εξαιρετικά καλό «μοντέλο» για το φυσικό μήκος. Με τους πραγματικούς αριθμούς όλα δουλεύουν άψογα – κι αν θέλεις μπορείς να κάνεις τη σύγκριση με την προσομοίωση που γίνεται στον υπολογιστή, όπου χρειάζεται συνεχώς να κάνουμε πολύπλοκες προσεγγίσεις.

Σ: Αυτό που λες λοιπόν είναι ότι ακόμα κι αν η τετραγωνική ρίζα του δύο δεν έχει κάποιον άμεσο φυσικό λόγο ύπαρξης, παρόλα αυτά είναι μια πολύ βολική μαθηματική επινόηση που μας επιτρέπει να μιλάμε για τα μήκη διαγωνίων με οικονομικό τρόπο;

Μ: Ναι.

Σ: Να συμφωνήσω μ' αυτό, αλλά δεν νομίζω ότι δικαιολογεί την ύπαρξη ολόκληρου του συστήματος των πραγματικών αριθμών. Γιατί δεν παίρνεις μόνο τους ρητούς μαζί με μερικούς ακόμα σημαντικούς αριθμούς όπως οι τετραγωνικές ρίζες του δύο, του τρία, του πέντε και ούτω καθεξής;

Μ: Εξαρτάται από το τι εννοείς όταν λες «και ούτω καθεξής».

Σ: Εντάξει, θα έπαιρνα τις τετραγωνικές ρίζες όλων των ρητών αριθμών.

Μ: Αυτό δεν είναι αρκετό, για παράδειγμα το άθροισμα της τετραγωνικής ρίζας του δύο και της τετραγωνικής ρίζας του τρία δεν είναι τετραγωνική ρίζα κάποιου ρητού.

Σ: Ωραία, βάλε το κι αυτό μέσα. Βάλε μαζί και όλα τα αθροίσματα ή γινόμενα των τετραγωνικών ριζών.

Μ: Και τι θα κάνεις με τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών που πρόσθεσες; Για παράδειγμα, θα έβαζες και την $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$;

Σ: Ναι, βάλε τους κι αυτούς μέσα. Για να τελειώνουμε, βάλε όλους τους αριθμούς που μπορείς να φτιάξεις ξεκινώντας από τους ρητούς αριθμούς και χρησιμοποιώντας την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και την εξαγωγή τετραγωνικών ριζών.

Μ: Και νομίζεις ότι θα μπορούσες να ζήσεις με αυτό το σύστημα αριθμών;

Σ: Γιατί όχι; Δεν βλέπω που είναι το πρόβλημα.

Μ: Λοιπόν, πρώτα απ' όλα δεν μπορείς ούτε καν να λύσεις όλες τις πολυωνυμικές εξισώσεις μέσα σε αυτό το σύστημα. Αυτό βέβαια δεν είναι καθόλου προφανές, υπάρχουν όμως πολυώνυμα πέμπτου βαθμού με ακέραιους συντελεστές που δεν έχουν ρίζες τις οποίες να μπορείς να χτίσεις ξεκινώντας από τους ρητούς αριθμούς και χρησιμοποιώντας την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και την εξαγωγή τετραγωνικών ριζών.

Σ: Κάπου το έχω ακούσει αυτό, έχει σχέση με τον Galois;

Μ: Ναι. Για την ακρίβεια, η μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης πέμπτου βαθμού αποδείχτηκε από τον Abel, όμως ο Galois προχώρησε πολύ παραπέρα και μας προσέφερε μια τελείως συστηματική μέθοδο ανάλυσης των πολυωνύμων.

Φ: Γειά σας. Μήπως διακόπτω;

Μ: Καθόλου. Προσπαθώ να πείσω τον **Σ** για την χρησιμότητα των πραγματικών αριθμών. Νομίζω ότι είναι έτοιμος να παραδεχτεί ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον τους αλγεβρικούς αριθμούς.

Σ: Ποιοί είναι αυτοί;

Μ: Είναι όλες οι λύσεις των πολυωνυμικών εξισώσεων, όπου τα πολυώνυμα έχουν ακέραιους συντελεστές.

Σ: Ναι, δεν έχω κανένα πρόβλημα με αυτούς, αν και μου γεννήθηκε μια απορία. Αφού υπάρχουν εξισώσεις πέμπτου βαθμού που δεν μπορείς να λύσεις με κάποιον προφανή τρόπο, πως είσαι τόσο σίγουρος ότι *έχουν* λύσεις;

Μ: Ίσως ο **Φ** μπορεί να μας δώσει την απάντηση.

Φ: Ναι, μπορώ. Το μάθαμε τώρα τελευταία. Θεωρήστε το πολυώνυμο πέμπτου βαθμού

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f.$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο a είναι θετικός. Τότε, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι αν ο x είναι μεγάλος και θετικός το ίδιο ισχύει για τον $P(x)$, ενώ αν ο x είναι μεγάλος κατ' απόλυτη τιμή και αρνητικός το ίδιο ισχύει για τον $P(x)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, κάπου ανάμεσα πρέπει να υπάρχει κάποιος x_0 για τον οποίο $P(x_0) = 0$.

Σ: Κάπου σε έχασα. Τι είναι αυτό το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής;

Μ: Για την ώρα, δεν θα σου δώσω την ακριβή του διατύπωση, νομίζω όμως ότι μπορώ να σε πείσω στη συγκεκριμένη περίπτωση. Σκέψου λίγο τη γραφική παράσταση του πολυωνύμου P για το οποίο συζητάμε. Είναι συνεχής, με την έννοια ότι δεν παρουσιάζει απότομα άλματα. Αν για κάποιες τιμές του x βρίσκεται κάτω από τον οριζόντιο άξονα και για κάποιες άλλες πάνω από αυτόν, τότε κάπου ανάμεσα θα πρέπει να τον διασχίσει, επειδή δεν κάνει άλματα, και στο σημείο που τον διασχίζει έχουμε μια λύση της εξίσωσης $P(x) = 0$.

Σ: Το επιχείρημα σου είναι αρκετά πειστικό. Ας συμπεριλάβουμε λοιπόν όλους τους αλγεβρικούς αριθμούς. Θα μπορούσα μάλιστα να σου δώσω την άδεια πολύ πιο πριν. Εκείνο που δεν μπορώ να χωνέψω είναι όλη αυτή η παράξενη θεωρητική αντιμετώπιση των πραγματικών αριθμών.

Μ: Θα μπορούσα σε αυτό το σημείο να σου υπενθυμίσω ότι ο e και ο π δεν είναι αλγεβρικοί αριθμοί. Πρώτα όμως θα προσπαθήσω να σου εξηγήσω γιατί είναι απαραίτητη μια πιο αφηρημένη, θεωρητική προσέγγιση στους αριθμούς. Αποτελέσματα όπως το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής δεν ισχύουν για τους ρητούς αριθμούς. Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x^2 - 2$ δεν τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε ρητό σημείο – και όταν αρχίζεις την προσπάθεια να αιτιολογήσεις αυτό που υπαγορεύει η διαίσθηση σου, αναγκάζεσαι να επινοήσεις τους πραγματικούς αριθμούς.

Δεύτερο Μέρος: Η ανάγκη για μια γενική θεωρία πραγματικών αριθμών

Σ: Αυτό ακούγεται ενδιαφέρον, αν και λίγο δύσκολο να το φανταστώ.

Φ: Θα ήθελα κι εγώ να το καταλάβω. Λες ότι ο ορισμός του συστήματος των πραγματικών αριθμών είναι κατά κάποιον τρόπο επιβεβλημένος;

Μ: Ναι. Εννοώ ότι ακόμα και μια βασική έννοια όπως αυτή της συνέχειας δεν έχει πολύ νόημα χωρίς τους πραγματικούς αριθμούς.

Φ: Γιατί αυτό;

Μ: Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f που ορίζεται στους ρητούς αριθμούς από την $f(x) = 1$ αν $x^2 < 2$ και $f(x) = 0$ αλλιώς. Αυτή η συνάρτηση έχει προφανώς άλματα στα σημεία $\pm\sqrt{2}$ (φυσικά, δεν λέω ότι αυτοί είναι ρητοί αριθμοί) και όμως, σύμφωνα με τον ορισμό της συνέχειας, η f είναι συνεχής συνάρτηση.

Φ: Για να το δούμε αυτό. Λοιπόν, αν ο x είναι ρητός τότε δεν είναι ίσος με $\pm\sqrt{2}$, άρα περιέχεται σε κάποιο μικρό διάστημα στο οποίο η f είναι σταθερή. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο x. Το ίδιο ισχύει για όλους τους ρητούς x, άρα η f είναι συνεχής.

Σ: Μα τι είναι αυτά που λέτε; Η συνάρτηση που ορίσατε έχει δύο ωραιότατα μεγάλα άλματα κι εσείς λέτε ότι είναι συνεχής;

Μ: Φαίνεται λιγάκι παράξενο στην αρχή, το θέμα είναι όμως ότι η συνέχεια ορίζεται σαν *τοπική* ιδιότητα. Διαισθητικά, μια συνάρτηση f είναι συνεχής *στο* x αν το $f(y)$ είναι κοντά στο $f(x)$ όταν το y είναι κοντά στο x. Κατόπιν λέμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε x.

Σ: Πρέπει να το σκεφτώ λίγο, αυτό όμως που μπορώ σίγουρα να πω είναι ότι αν ο ορισμός σας κάνει συνεχή αυτή τη συνάρτηση, τότε δεν είναι και πολύ καλός ορισμός.

Μ: Είναι λογικό να σκέφτεσαι έτσι, στην πραγματικότητα όμως είναι ένας εξαιρετικά καλός ορισμός. Δεν συμπίπτει ακριβώς με την διαισθητική μας αντίληψη για το τι θα έπρεπε να είναι μια συνεχής συνάρτηση – κάτι σαν μια συνάρτηση που μπορείς να σχεδιάσεις τη γραφική της παράσταση χωρίς να χρειαστεί να σηκώσεις το μολύβι σου από το χαρτί – είναι όμως αρκετά αποτελεσματικός σε αυτή την κατεύθυνση, και πάνω από εκατό χρόνια πείρας έχουν δείξει ότι είναι ο «σωστός» τρόπος να τυποποιήσεις αυτή την ιδέα.

Φ: Μια στιγμή, νομίζω ότι ο **Σ** έχει κάποιο δίκιο εδώ. Ο ορισμός της συνέχειας είναι φτιαγμένος για τους πραγματικούς αριθμούς, δεν δείχνει λοιπόν την ανεπάρκεια των ρητών αριθμών το γεγονός ότι οδηγεί σε περίεργα αποτελέσματα εκεί. Πώς ξέρεις ότι δεν υπάρχει κάποιος αυστηρός ορισμός που να δουλεύει καλύτερα στους ρητούς;

Μ: Μπορείς να μου περιγράψεις έναν;

Φ: Το πρόβλημα που είχαμε με το άλμα στην $\sqrt{2}$ ήταν ότι δεν μας επιτρεπόταν να πούμε αυτό που όλοι ξέρουμε ότι συμβαίνει – ότι η συνάρτηση έχει άλμα στο σημείο $\sqrt{2}$. Αν ρίξουμε μια ματιά στη γραφική παράσταση θα το δούμε αμέσως. Δεν θα μπορούσαμε να το περιγράψουμε λέγοντας ότι από τη μια πλευρά η συνάρτηση είναι μεγάλη και από την άλλη πλευρά είναι ξαφνικά μικρή;

Μ: Και τι εννοείς όταν λες «ξαφνικά»;

Φ: Ας πούμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει ένα ζευγάρι αριθμών x, y για τους οποίους $|x - y| < \delta$, όμως $f(x) = 1$ και $f(y) = 0$. Δηλαδή, οι x και y είναι κοντά, ενώ οι $f(x)$ και $f(y)$ δεν είναι κοντά.

Σ: Αυτό περίπου σκεφτόμουνα κι εγώ. Μπορείς να έχεις άλμα παρόλο που αυτό το άλμα δεν συμβαίνει σε κάποιο ρητό σημείο.

Μ: Μπορείς λοιπόν να μου πείς ποιός ακριβώς είναι ο ορισμός σου;

Φ: Φαίνεται ότι υπάρχουν πολλές δυνατότητες. Αν αυτό που θέλουμε είναι να αποφύγουμε να εστιάσουμε σε ένα μόνο σημείο (γιατί το σημείο που θα θέλαμε να κοιτάξουμε μπορεί να είναι άρρητο) τότε θα μπορούσαμε να λέμε ότι η f είναι συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ οποτεδήποτε $|x - y| < \delta$.

Μ: Αυτός ο ορισμός που έδωσες είναι στ' αλήθεια αυστηρός ορισμός, όμως είναι ο ορισμός της *ομοιόμορφης συνέχειας*, που είναι έννοια ισχυρότερη από την έννοια της συνέχειας, όσο κι αν δεν φαίνεται αμέσως η διαφορά.

Φ: Λες λοιπόν ότι υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις που με αυτόν τον ορισμό δεν θα τις λογαριάζαμε σαν συνεχείς;

M: Ναι, υπάρχουν πολλές. Για παράδειγμα, η x^2 ορισμένη στο σύνολο όλων των ρητών.

Φ: Κατάλαβα. Θα σου δώσω λοιπόν έναν άλλο ορισμό χρησιμοποιώντας ακολουθίες. Θα θέλαμε να λέμε ότι η f είναι συνεχής αν το $f(x_n)$ τείνει στο $f(x)$ όταν το x_n τείνει στο x, αυτό όμως θα οδηγούσε στο γνωστό πρόβλημα ότι το x για το οποίο μιλάμε μπορεί να μην είναι ρητό. Δεν μπορούμε όμως να μιλάμε για ακολουθίες που θα έπρεπε να «συγκλίνουν» χωρίς να μιλάμε για το όριό τους; Μάθαμε τις προάλλες έναν ωραίο τρόπο για να το κάνουμε – τις ακολουθίες Cauchy. Με αυτές μπορεί κανείς να δώσει έναν καλό ορισμό για ακολουθίες ρητών που «συγκλίνουν, όχι όμως αναγκαστικά σε ρητό». Να πούμε λοιπόν ότι η f είναι συνεχής αν απεικονίζει ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy;

M: Νομίζω ότι ούτε αυτό δουλεύει. Για παράδειγμα, πάρε σαν $f(x)$ την $1/x$ στο σύνολο των γνησίως θετικών ρητών. Αυτή είναι συνεχής, όμως η ακολουθία Cauchy $(1/n)$ απεικονίζεται στην ακολουθία (n) που δεν είναι Cauchy.

Φ: Ναι, αλλά δεν δουλεύει για εκείνες τουλάχιστον τις συναρτήσεις που ορίζονται σε ολόκληρο το σύνολο των ρητών; Ας υποθέσουμε ότι η f είναι ο περιορισμός στο $\mathbb{Q}$ μιας συνεχούς συνάρτησης που ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Τότε, απεικονίζει συγκλίνουσες ακολουθίες σε συγκλίνουσες ακολουθίες. Όμως συγκλινουσες και Cauchy είναι το ίδιο πράγμα, άρα απεικονίζει ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy. Αντίστροφα, αν η f απεικονίζει το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{Q}$ (ή ακόμα το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$) και πηγαίνει τις ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy, τότε μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της στο $\mathbb{R}$ ως εξής. Αν μας δώσουν έναν πραγματικό αριθμό x, θεωρούμε μια ακολουθία (x_n) ρητών που συγκλίνει στο x και μετά απεικονίζουμε το x στο όριο της $(f(x_n))$. Αυτό υπάρχει γιατί είναι ακολουθία Cauchy – κι αυτό με τη σειρά του προκύπτει από το γεγονός ότι η (x_n) είναι Cauchy. Επίσης, η τιμή που επιλέξαμε σαν $f(x)$ είναι καλά ορισμένη, αλλιώς θα μπορούσαμε να βάλουμε δύο ακολουθίες μαζί και να καταλήξουμε σε αντίφαση με την ιδιότητα που υποθέσαμε ότι έχει η f.

M: Αυτά που λες είναι σωστά, και δουλεύουν για συναρτήσεις που ορίζονται σε κάποιο κλειστό διάστημα ρητών αριθμών. Δεν μου αρέσουν όμως και πολύ, γιατί βασικά βάζεις μέσα τους πραγματικούς αριθμούς από την πίσω πόρτα. Στο τέλος - τέλος, ένας πραγματικός αριθμός δεν είναι μια ακολουθία Cauchy ρητών; Για να επιστρέψουμε στη συνάρτηση που πηδούσε στο $\sqrt{2}$, αυτό που προτείνεις είναι να αποκαλύψουμε την «ασυνέχεια» της συνάρτησης κατασκευάζοντας μια ακολουθία ρητών που συγκλίνει στο $\sqrt{2}$ και παίρνει εναλλάξ τιμές μεγαλύτερες και μικρότερες από $\sqrt{2}$, οπότε εφαρμόζοντας την f σε αυτήν την ακολουθία παίρνουμε εναλλάξ 0 και 1. Μετά, υποκρίνεσαι ότι ο $\sqrt{2}$ δεν υπάρχει και απλώς αναφέρεις ότι η ακολουθία σου είναι Cauchy. Όλα αυτά είναι ένας τεχνητός τρόπος για να μην πεις τι πραγματικά συμβαίνει.

Σ: Μα, κι όταν εσύ έλεγες ότι η f είναι συνεχής με επιχείρημα ότι δεν σου επιτρεπόταν να μιλήσεις για το σημείο στο οποίο γίνεται το άλμα, με τεχνητό τρόπο απέφευγες να πείς τι πραγματικά συμβαίνει.

Φ: Να σας δώσω κι άλλον ορισμό. Αν μας δώσουν μια ακολουθία I_n εγκιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων ρητών αριθμών με μήκη που τείνουν στο μηδέν, κοιτάμε τις εικόνες τους $f(I_n)$. Για να λέμε ότι η f είναι συνεχής θα θέλαμε η τομή των $f(I_n)$ να είναι κενή ή μονοσύνολο.

M: Ούτε αυτό μου αρέσει, για τον ίδιο λόγο. Αυτό που δίνεις είναι μια περιγραφή του πραγματικού αριθμού – η τομή των I_n – χωρίς να το παραδέχεσαι.

Σ: Αν μου επιτρέπεις, η στάση σου είναι πολύ παράξενη. Είσαι πρόθυμος να κάνεις ένα πολύ τεχνητό και αφύσικο βήμα και να ορίσεις τον πραγματικό αριθμό σαν μια κλάση ισοδυναμίας ακολουθιών Cauchy από ρητούς ή από κατάλληλες ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων, και μετά κατηγορείς εμάς γιατί δεν ενθουσιαζόμαστε με τον ορισμό σου. Τι είναι πιο τεχνητό; Να δώσεις έναν απλό ορισμό της συνέχειας μέσω ακολουθιών Cauchy ή να παρασυρθείς τόσο μακριά που να αρχίσεις να πιστεύεις ότι οι ακολουθίες Cauchy *είναι* πραγματικοί αριθμοί;

Φ: Εν πάσει περιπτώσει, γιατί δεν επιστρέφουμε σ' αυτό που είπα στην αρχή; Τώρα θυμήθηκα ότι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς αν τις περιορίσουμε σε ένα φραγμένο κλειστό διάστημα. Γιατί λοιπόν δεν *ορίζουμε* ότι μια συνάρτηση f από το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{Q}$ είναι συνεχής αν ο περιορισμός της σε κάθε φραγμένο κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής; Θέλω να πώ, αυτό που είπα πριν είναι μια χαρά αν μιλάμε για πεπερασμένα κομμάτια του $\mathbb{Q}$. Και τώρα, δεν βλέπω με ποιό τρόπο μπαίνουν στη συζήτηση μεταμφιεσμένοι οι πραγματικοί αριθμοί.

Μ: Ίσως έχεις δίκιο. Εντάξει, πώς θα όριζες τώρα την παραγωγισιμότητα;

Φ: Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια συνάρτηση που είναι, να το πούμε έτσι, παραγωγίσιμη αλλά «δεν θα έπρεπε» να είναι. Να πάρουμε την $f(x) = \max\{x^2 - 2, 0\}$; Θέλω να πώ ότι αυτή η συνάρτηση f δεν είναι στ' αλήθεια παραγωγίσιμη γιατί δεν προσεγγίζεται από γραμμική κοντά στην $\sqrt{2}$. Για να το δείξω, θα μπορούσα να κατασκευάσω εύκολα ένα ζευγάρι ρητών ακολουθιών (a_n) και (b_n) που συγκλίνουν στην $\sqrt{2}$ από πάνω και από κάτω αντίστοιχα, έτσι ώστε η $(f(b_n) - f(a_n))/(b_n - a_n)$ να μην συγκλίνει. Θα μου πείς φαντάζομαι ότι μιλάω έμμεσα για τους πραγματικούς αριθμούς όταν ορίζω αυτές τις ακολουθίες.

Μ: Όντως. Και αν προσπαθήσεις να αντιγράψεις το τέχνασμα της ομοιόμορφης συνέχειας θα συναντήσεις το πρόβλημα ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα παραγωγίσιμη, ακόμα κι αν περιοριστούμε σε ένα φραγμένο κλειστό διάστημα.

Φ: Τι σημαίνει ο όρος «ομοιόμορφα παραγωγίσιμη»;

Μ: Παραγωγίσιμη στο x σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για όλα τα y που ικανοποιούν την $|y-x| < \delta$ να έχουμε $f(y) = f(x)+(y-x)f'(x)+c$, όπου το c είναι το πολύ ίσο με $\varepsilon|y-x|$. Για να το κάνουμε αυτό ομοιόμορφο, πρέπει να ζητήσουμε το δ να μην εξαρτάται από το x. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για όλα τα x, y που ικανοποιούν την $|y-x| < \delta$ να έχουμε $|f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)| \leq \varepsilon|y-x|$. Όμως αυτός δεν είναι και τόσο σπουδαίος ορισμός, γιατί είναι ισοδύναμος με το να λέμε ότι οι $(f(x+h) - f(x))/h$ τείνουν στην $f'(x)$ *ομοιόμορφα* όταν το h τείνει στο μηδέν. Όμως αν η f είναι παραγωγίσιμη τότε οι συναρτήσεις $(f(x+h) - f(x))/h$ είναι συνεχείς, άρα και η f', και καταλήγουμε στο ότι οι ομοιόμορφα παραγωγίσιμες συναρτήσεις είναι αυτομάτως και συνεχώς παραγωγίσιμες.

Φ: Δεν μου αρέσει αυτός ο ορισμός γιατί προϋποθέτει ότι ήδη γνωρίζεις ποιά είναι η παράγωγος $f'(x)$.

Μ: Αφού δεν σου αρέσει αυτό, θα μπορούσες να πείς ότι «παραγωγίσιμη» σημαίνει «τοπικά κατά προσέγγιση γραμμική». Τι σημαίνει; Αν $f(x) = u$ και $f(y) = v$ και $z = ax + by$ για κάποιους $a, b > 0$ με $a+b = 1$ τότε ο $f(z)$ πρέπει να είναι κοντά στον $au + bv$, την τιμή που θα έπαιρνε αν η f ήταν ακριβώς γραμμική. Λέμε λοιπόν ότι η f είναι ομοιόμορφα παραγωγίσιμη αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: αν $|y - x| < \delta$ και $z = ax + by$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός των x και y τότε έχουμε $|f(z) - af(x) - bf(y)| \leq \varepsilon|z - x|$.

Φ: Αυτό ακούγεται πολύ πιο ευχάριστα. Ποιό είναι λοιπόν το παράδειγμα μιας συνάρτησης που είναι παραγωγίσιμη αλλά δεν είναι ομοιόμορφα παραγωγίσιμη;

Μ: Οποιαδήποτε από τις παλιές καλές συναρτήσεις με το $\sin(1/x)$ είναι αρκετή. Ας πάρουμε την αγαπημένη μας $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Αυτή ταλαντώνεται τόσο πολύ κοντά στην αρχή των αξόνων που σίγουρα δεν ικανοποιεί τους ορισμούς που δώσαμε.

Φ: Αυτό λοιπόν που υποστηρίζεις είναι ότι χρειαζόμαστε την θεωρία των πραγματικών αριθμών για να μπορούμε να μιλάμε για την παραγωγισιμότητα ανόητων συναρτήσεων όπως η $x^2 \sin(1/x)$; Γιατί να μην αρκεστούμε στις συνεχώς παραγωγίσιμες ή στις ομοιόμορφα παραγωγίσιμες;

Μ: Η αίσθηση μου είναι ότι θα εγκατέλειπες πολλά αν απαιτούσες όλες οι συναρτήσεις σου να είναι συνεχώς παραγωγίσιμες. Αντί όμως να ξεκινήσουμε μια συζήτηση πάνω σ' αυτό το θέμα, προτιμώ να επιστρέψουμε στο θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, το οποίο κατά τη γνώμη μου δίνει μια πολύ πιο πειστική ερμηνεία για την αναγκαιότητα των πραγματικών αριθμών.

Τρίτο Μέρος: Το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής

Μ: Να δούμε πού είχαμε μείνει. Συμφωνούμε όλοι ότι οι ρητοί από μόνοι τους είναι αρκετά περιοριστικοί γιατί υπάρχουν πολλοί χρήσιμοι αριθμοί, όπως οι $\sqrt{2}$, e και π, οι οποίοι είναι άρρητοι;

Φ και Σ: Ναι.

Μ: Ωραία. Τώρα, αν εξετάσουμε πιο προσεκτικά γιατί πιστεύουμε σ' αυτούς τους αριθμούς, θα δούμε ότι υπάρχουν κάποιες μέθοδοι που μας αρέσει να χρησιμοποιούμε για να φτιάχνουμε νέους αριθμούς, και αν κάνουμε την αθώα παραδοχή ότι αυτές οι μέθοδοι είναι πράγματι ορθές, τότε αναγαζόμαστε να αποδεχτούμε ολόκληρο το σύστημα των πραγματικών αριθμών.

Σ: Όπως είπα και πριν, αυτό ακούγεται πολύ ενδιαφέρον – θα το πιστέψω όμως μόνο όταν το δω.

Μ: Μα είναι πολύ απλό. Ας πάρουμε για παράδειγμα την $\sqrt{2}$. Είναι ο (θετικός) αριθμός που υψωμένος στο τετράγωνο δίνει τον 2. Και γιατί είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχει ένας τέτοιος αριθμός; Γιατί ξέρουμε ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα, το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Σ: Συνεχώς το αναφέρεις αυτό. Θα μου πείς επιτέλους τι λέει;

Μ: Είμαι σίγουρος ότι ο **Φ** θα μας το πεί.

Φ: Πολύ ευχαρίστως. Λέει ότι αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση, $a < b$ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί και $f(a) = u$, $f(b) = v$, τότε για κάθε w ανάμεσα στον u και στον v πρέπει να υπάρχει κάποιος c ανάμεσα στους a και b τέτοιος ώστε $f(c) = w$. Με άλλα λόγια, αν μια συνεχής συνάρτηση f παίρνει δύο τιμές, τότε πρέπει να παίρνει και όλες τις «ενδιάμεσες τιμές» ανάμεσα τους. Πιο περιγραφικά, αν σχεδιάσεις τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης και κάποιο κομμάτι της είναι κάτω από μια οριζόντια ευθεία ενώ κάποιο άλλο είναι πάνω από αυτήν, τότε η γραφική παράσταση πρέπει να τέμνει την ευθεία σε κάποιο σημείο.

Μ: Ευχαριστούμε. Ένα καλό παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Αφού $f(1) = 1$ και $f(2) = 4$, πρέπει να υπάρχει κάποιος x ανάμεσα στους 1 και 2 που να ικανοποιεί την $f(x) = 2$.

Σ: Ακούγεται λογικό, γιατί όμως ισχύει το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής;

Μ: Μου αρέσει που ρωτάς. Οι περισσότεροι άνθρωποι νομίζουν ότι είναι τόσο προφανές που δεν χρειάζεται απόδειξη.

Σ: Συμφωνώ ότι δεν μπορείς να περάσεις από τη μια μεριά μιας ευθείας στην άλλη χωρίς να την διασχίσεις, η απόσταση όμως από αυτόν τον φυσικό ισχυρισμό μέχρι την διατύπωση ενός ισχυρισμού στο αφηρημένο πλαίσιο των αριθμών μου φαίνεται μεγάλη. Αυτό που με ανησυχεί περισσότερο απ' όλα είναι ότι το επιχείρημα σου είναι κυκλικό. Αν το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής ισχύει μόνο για τους πραγματικούς αριθμούς και όχι για μικρότερα συστήματα αριθμών, τότε πώς μπορείς να το χρησιμοποιήσεις για να *αιτιολογήσεις* τους πραγματικούς αριθμούς; Αντίθετα, χρειάζεσαι τους πραγματικούς αριθμούς για να αιτιολογήσεις *το θεώρημα*.

Μ: Δεν έχω κανένα πρόβλημα να παραδεχτώ την ενοχή μου. Συγχέεις δύο διαφορετικούς τύπους αιτιολόγησης. Για να *αποδείξουμε* το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής χρειαζόμαστε τους πραγματικούς αριθμούς. Στην αντίθετη κατεύθυνση, χρησιμοποιώ το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για να αιτιολογήσω τους πραγματικούς αριθμούς με διαφορετικό τρόπο: είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο θεώρημα το οποίο δεν θα είχαμε στη διάθεση μας αν δεν είχαμε στη διάθεση μας τους πραγματικούς αριθμούς.

Σ: Ίσως έχεις δίκιο. Με απογοητεύει όμως το ότι επιχειρηματολογείς σε τελείως θεωρητικό επίπεδο. Θα προτιμούσα να υπάρχουν πιο άμεσα επιχειρήματα.

Μ: Είναι γιατί δεν σου έχω ακόμα αναφέρει ένα άλλο σημαντικό σημείο, ότι το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής είναι απλώς η μεταμφίεση μιας ιδέας που *είναι* πολύ άμεση και φυσιολογική. Να σου δώσω λοιπόν μία ακόμα προσέγγιση στην ύπαρξη της $\sqrt{2}$. Απλώς φτιάχνεις το δεκαδικό ανάπτυγμα $1.4142135\cdots$, παίρνοντας κάθε φορά τον μεγαλύτερο ακέραιο μεταξύ 0 και 9 που δεν οδηγεί σε τετράγωνο μεγαλύτερο από 2. Με αυτόν τον τρόπο ορίζονται άπειρα δεκαδικά ψηφία και ο αριθμός που προκύπτει είναι η $\sqrt{2}$. Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι ότι αυτή η απλή κατασκευή είναι παρόμοια με κάποιες από τις αποδείξεις του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, και όταν προσπαθείς να αιτιολογήσεις γιατί το τετράγωνο του αριθμού που «κατασκευάζεις» ισούται με 2 τότε βλέπεις ότι σιωπηλά χρησιμοποιείς τη συνέχεια της συνάρτησης x^2 και ουσιαστικά αποδεικνύεις το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής σε αυτήν την ειδική περίπτωση.

Σ: Ας υποθέσουμε ότι το δέχομαι αυτό. Είμαι υποχρεωμένος τότε να δεχτώ μαζί ολόκληρο το σύστημα των πραγματικών αριθμών, όπως είπες πριν, ή μόνο κάποιους πρόσθετους ειδικούς αριθμούς όπως οι $\sqrt{2}$, e και π;

Μ: Πρέπει να τους δεχτείς όλους: για κάθε πραγματικό αριθμό t βρές μια συνεχή συνάρτηση που μηδενίζεται μόνο στο t, και τότε έχεις αποδεχτεί τον t.

Σ: Κι αυτό μπορείς πάντα να το κάνεις;

Μ: Είναι πολύ εύκολο. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x - t$ έχει αυτήν την ιδιότητα.

Σ: Δεν πιστεύω στ' αυτιά μου. Το λές σοβαρά ότι χρησιμοποιείς τη συνάρτηση $f(x) = x - t$ για να δικαιολογήσεις την ύπαρξη του αριθμού t;

Μ: Ωραία, σε καταλαβαίνω. Ήμουνα λίγο βιαστικός. Ας επιστρέψουμε στη συζήτηση για την $\sqrt{2}$. Ο «απλοϊκός» τρόπος για να την ορίσουμε είναι να φτιάξουμε το δεκαδικό της ανάπτυγμα. Όταν μιλάς για τους πραγματικούς αριθμούς με αυστηρότερο τρόπο, εξελίσσεις αυτή τη διαδικασία σε μια γενική αρχή, γνωστή σαν το αξίωμα των μονότονων ακολουθιών. Αυτό λέει ότι αν (x_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών και αν υπάρχει κάποιος z που είναι μεγαλύτερος από κάθε x_n, τότε η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο όριο x. Δεν θα το ορίσω ακριβώς, αλλά έχεις ένα παράδειγμα με την ακολουθία $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots$, η οποία συγκλίνει στην $\sqrt{2}$. Αυτή η γενική αρχή είναι επίσης φυσιολογική, πιο βασική μάλιστα από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. Σε εξαναγκάζει δε να αποδεχτείς το σύστημα των πραγματικών αριθμών, γιατί αποδεικνύεται ότι κάθε διατεταγμένο σώμα στο οποίο ισχύει αυτό το αξίωμα είναι ισομορφικό με το σώμα των πραγματικών αριθμών.

Σ: Τώρα με τύφλωσες λίγο με την επιστημοσύνη σου, αν όμως σε καταλαβαίνω καλά, μπορούμε να συγκεντρώσουμε την προσοχή μας αποκλειστικά στο ερώτημα αν θα έπρεπε να αποδεχτούμε το αξίωμα των μονότονων ακολουθιών.

Μ: Ναι, γιατί από αυτό το αξίωμα παίρνουμε όλα όσα ισχύουν για τους πραγματικούς αριθμούς.

Σ: Ακόμα αισθάνομαι άβολα. Ας υποθέσουμε ότι παίρνω έναν αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία και προσπαθώ να τον «αιτιολογήσω». Ας πάρουμε για παράδειγμα τον π. Λυπάμαι αν φαίνομαι αγενής, αλλά μου φαίνεται ότι αυτό που προτείνεις είναι η εξής παράδοξη αιτιολόγηση: θεωρούμε την ακολουθία

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, \cdots$$

και, ξαφνικά, έχουμε τον π. Βλέπω ότι υπάρχει μια διαδικασία που εφαρμόζεται σε κάθε αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία, πολύ δύσκολα όμως θα την αποδεχόμουν σαν αιτιολόγηση της ύπαρξης του π. Για να *αιτιολογήσω* τον π θα ήθελα να πώ ότι έχει θεμελιώδη σημασία για την τριγωνομετρία, ότι ισχύει ο θαυμάσιος τύπος $e^{i\pi} = -1$ και ούτω καθεξής.

Μ: Έχει σημασία να κάνουμε τη διάκριση ανάμεσα στην αιτιολόγηση κάποιων συγκεκριμένων αριθμών και την αιτιολόγηση ενός *συστήματος* αριθμών. Δεν έχω κανένα πρόβλημα να δεχτώ ότι στη συντριπτική τους πλειοψηφία οι πραγματικοί αριθμοί είναι παντελώς άχρηστοι. Όλοι μαζί όμως διαμορφώνουν ένα σύστημα αριθμών που είναι αρκετά γενναιόδωρο ώστε να περιέχει όλους τους χρήσιμους αριθμούς. Δεύτερον, και πιο σημαντικό, μας παρέχουν ένα πλαίσιο στο οποίο ισχύουν όλα τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούμε για να αιτιολογήσουμε την ύπαρξη αυτών των χρήσιμων αριθμών. Αν λοιπόν θελήσουμε κάποια στιγμή να ορίσουμε έναν καινούργιο αριθμό με αυτά τα επιχειρήματα, μπορούμε να το κάνουμε. Δεν χρειάζεται να προσπαθήσουμε να προβλέψουμε ποιοί αριθμοί μπορεί να μας φανούν χρήσιμοι.

Τέταρτο Μέρος: Τι είναι η τυχούσα ακολουθία;

Φ: Μπορώ να πω κι εγώ κάτι εδώ; Καταλαβαίνω τι λές, και λίγο-πολύ έχω πειστεί, βλέπω όμως κάποια σημεία που μπορεί να επιτρέψουν αντιρρήσεις. Αυτό που λές είναι περίπου το εξής: όταν θέλουμε να ορίσουμε έναν άρρητο αριθμό πρέπει να κάνουμε κάποια ανάλυση – για παράδειγμα, να παρουσιάσουμε μια ακολουθία ρητών που συγκλίνει σε αυτόν, ή μια συνεχή συνάρτηση που τον έχει σαν μοναδική της ρίζα, ή ένα ορισμένο ολοκλήρωμα που τον έχει σαν τιμή. Φαίνεται ότι η πρώτη από αυτές τις μεθόδους είναι πάντα αρκετή, μπορούμε μάλιστα να χρησιμοποιούμε μόνο μονότονες ακολουθίες. Τώρα όμως ξαφνικά λές ότι θα έπρεπε να επιτρέψουμε σε *όλες* τις φραγμένες μονότονες ακολουθίες να έχουν όριο. Ίσως όμως υπάρχει ένα άλλο, πιο περιοριστικό αξίωμα που να δίνει ένα πολύ μικρότερο σύνολο αριθμών και όμως να μας δίνει όλους τους χρήσιμους αριθμούς. Νομίζω ότι υπάρχει κάποια ουσία στην αντίρρηση του **Σ** για την «ανόητη» αιτιολόγηση του π. Για έναν τυπικό, τελείως άσημο πραγματικό αριθμό, δεν είναι εύκολο να σκεφτούμε κάποια λογική αιτιολόγηση. Δεν θα μπορούσαμε με κάποιον τρόπο να πούμε ότι όλες οι «λογικές» φραγμένες μονότονες ακολουθίες συγκλίνουν;

Μ: Μπορείς να δοκιμάσεις, αλλά προβλέπω ότι δεν θα είναι εύκολο.

Φ: Δεν είμαι τελείως σίγουρος γι' αυτό που λέω, φοβάμαι όμως ότι το σύστημα των πραγματικών αριθμών δεν είναι στ' αλήθεια καλά ορισμένο. Η εικόνα που προσπάθησες να μας παρουσιάσεις είναι ότι ξεκινάμε με τους ρητούς, ανακαλύπτουμε ότι είναι ανεπαρκείς, εισάγουμε κάποιους νέους αριθμούς, βλέπουμε πώς το κάναμε, και μετά λέμε ότι αυτές οι μέθοδοι παράγουν ολόκληρο το σύστημα των πραγματικών αριθμών.

Μ: Αυτή είναι μια λογική περίληψη όσων είπαμε.

Φ: Για να το θέσω πιο τυπικά, έχεις μια άπειρη πράξη, την $f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \lim x_n$, που ορίζεται για όλες τις φραγμένες μονότονες ακολουθίες, και λες ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι το μικρότερο σύστημα αριθμών που περιέχει τους ρητούς και είναι κλειστό κάτω από αυτήν την πράξη.

Μ: Ακριβώς.

Φ: Αυτό είναι εντάξει, αν είμαστε ικανοποιημένοι με την έννοια της φραγμένης μονότονης ακολουθίας.

Μ: Βρίσκεις κάτι το σκοτεινό σ' αυτήν την έννοια;

Φ: Κατά κάποιον τρόπο, ναι. Δεν ξέρω πώς να διατυπώσω αυτό που λέω, αλλά θα προσπαθήσω. Ας υποθέσουμε ότι ο x είναι ένας τυπικός πραγματικός αριθμός. Τότε, ο x προσδιορίζει για μάς μια φραγμένη μονότονη ακολουθία – δεν έχουμε παρά να πάρουμε το δεκαδικό του ανάπτυγμα και να κοιτάμε όλα και μεγαλύτερα αρχικά κομμάτια του. Αντίστροφα, αυτή η φραγμένη μονότονη ακολουθία προσδιορίζει τον x – αφού ο x είναι το όριό της. Όλα αυτά όμως μοιάζουν να λένε ότι ο x και η φραγμένη μονότονη ακολουθία αλληλοεξαρτώνται – αν μου δώσεις το ένα, έχω το άλλο. Την ίδια στιγμή δεν μου δίνουν κάποια ιδέα για το ποιά ζευγάρια (x, ακολουθία που συγκλίνει στο x) υπάρχουν.

Μ: Θέλεις να πείς ότι υπάρχουν τέτοια ζευγάρια που δεν υπάρχουν; Αν ναι, τότε δεν καταλαβαίνω το νόημα της λέξης «υπάρχουν»!

Φ: Όπως είπα και πιο πριν, δεν ξέρω πώς να το εξηγήσω, Μου φαίνεται ότι προκειμένου να ορίσουμε την πράξη της κλειστότητας, πρέπει να μιλήσουμε για την τυχούσα φραγμένη μονότονη ακολουθία, και αυτή η έννοια είναι εντελώς ισοδύναμη με την έννοια του πραγματικού αριθμού. Έτσι, καταλήγουμε σε κάτι που μοιάζει κυκλικό. Αποτέλεσμα δε αυτής της κυκλικότητας είναι ότι δεν έχουμε καθαρή εικόνα για την ύπαρξη των περισσότερων πραγματικών αριθμών. Όταν λές «κάθε φραγμένη μονότονη ακολουθία» θέλω να ρωτήσω τι είδους φραγμένες μονότονες ακολουθίες υπάρχουν. Γιατί θα' πρεπε να δεχτώ την έννοια της τυχούσας φραγμένης μονότονης ακολουθίας; Για να πώ την αλήθεια, δεν νομίζω ότι έχεις αιτιολογήσει τους πραγματικούς αριθμούς – πέρα από αυτούς που ορίζονται με έναν ωραίο και ευθύ τρόπο.

Σ: Ευχαριστώ. Αυτό ακριβώς προσπαθούσα να πώ νωρίτερα.

Μ: Αρχίσαμε να βαλτώνουμε. *Υπάρχει* κάτι το μυστηριώδες στην ιδέα της τυχούσας άπειρης ακολουθίας – ακόμα κι αν αποτελείται μόνο από μηδενικά και μονάδες. Κι όμως, αν θέλουμε να έχουμε μια εύχρηστη θεωρία για τους πραγματικούς αριθμούς φαίνεται ότι πρέπει να δεχτούμε ότι κάποιες από αυτές είναι απροσδιόριστες, για τον απλούστατο λόγο ότι υπάρχουν αριθμήσιμοι το πλήθος διαφορετικοί ορισμοί ενώ υπάρχουν υπεραριθμήσιμοι το πλήθος πραγματικοί αριθμοί. Αυτή η παρατήρηση απαγορεύει μια καθόλα ελκυστική ιδέα – να περιοριστούμε στους πραγματικούς αριθμούς που είναι ορίσιμοι.

Φ: Με μπέρδεψες τώρα λέγοντας ότι υπάρχουν μόνο αριθμήσιμοι το πλήθος ορίσιμοι πραγματικοί αριθμοί. Τι θα γίνει αν τους βάλεις όλους σε μια λίστα σύμφωνα με τη λεξικογραφική διάταξη των ορισμών τους και κατόπιν εφαρμόσεις ένα διαγώνιο επιχείρημα; Δεν θα σου δώσει αυτό έναν καινούργιο, και ορισμένο, αριθμό;

Μ: Σου είπα ότι αρχίσαμε να βαλτώνουμε. Η απάντηση είναι ότι πρέπει να ορίσεις τι ακριβώς εννοείς με τη λέξη ορισμός. Αν το κάνεις, θα δεις ότι ο διαγώνιος αριθμός που κατασκευάζεις *δεν* είναι ορίσιμος με τον τρόπο που ήταν οι αριθμοί στη λίστα σου. Είναι μάλλον μετα-ορίσιμος.

Φ: Όμως, σ' αυτήν την περίπτωση, δεν βλέπω τι με εμποδίζει να βάλω έναν αξιοπρεπή ορισμό και μετά να περιοριστώ στους ορίσιμους πραγματικούς αριθμούς. Αν μετά προσπαθήσεις να με πείσεις ότι υπάρχουν αριθμοί που άφησα απ' έξω, θα σου ζητήσω να μου ορίσεις έναν, και δεν θα μπορείς να το κάνεις. Θα μπορείς να μετα-ορίσεις κάποιον, μικρό το κακό. Γιατί να με ανησυχούν αυτοί;

Μ: Γιατί το σύνολο των αριθμών σου θα είναι αριθμήσιμο και όλα τα θεωρήματα της ανάλυσης θα πάψουν να ισχύουν.

Φ: Μα ποιό θα είναι το πρόβλημα; Τα «θεωρήματα της ανάλυσης» στα οποία αναφέρεσαι αφορούν αντικείμενα τα οποία αντιπαθώ και δεν έχουν καμία προφανή χρησιμότητα, όπως οι «τυχούσες» ακολουθίες. Θα μπορούσα ούτως ή άλλως να κάνω οτιδήποτε είναι χρήσιμο, έτσι δεν είναι; Για παράδειγμα, το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής θα ίσχυε για τις ορίσιμες συνεχείς συναρτήσεις, και δεν με πολυενδιαφέρουν οι υπόλοιπες. Τελικά, θα κατέληγα να χρησιμοποιώ ακριβώς την ίδια γλώσσα με τη δική σου, μόνο που εσύ εννοείς κάτι λίγο διαφορετικό με τη φράση «για κάθε x», που για μένα θα σήμαινε «για κάθε ορίσιμο x», ότι κι αν ήταν τελικά αυτό το x. Θα μπορούσα μάλιστα ακόμα και να πω ότι οι πραγματικοί είναι υπεραριθμήσιμοι! Μ' αυτό θα εννοούσα στην ορολογία σου ότι δεν υπάρχει ορίσιμη αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο $\mathbb{N}$ και τους ορίσιμους πραγματικούς αριθμούς, γιατί αν υπήρχε θα μπορούσα να εφαρμόσω ένα διαγώνιο επιχείρημα και να ορίσω έναν πραγματικό που δεν ανήκει στην εικόνα.

Μ: Είμαι βέβαιος ότι αυτό θα αρχίσει να σκαλώνει κάπου, αλλά δεν βλέπω πού αυτή τη στιγμή.

Λ: Συγνώμη που πετάγομαι, αλλά έτυχε να ακούσω ένα μέρος της συζήτησής σας, και νομίζω ότι μπορώ να βοηθήσω σε μερικά από τα ερωτήματά σας.

Μ: Αλήθεια;

Λ: Λοιπόν, το πιο προφανές πράγμα που μπορώ να πω είναι ότι ο **Φ** είναι σχεδόν έτοιμος να ξαναανακαλύψει τη λεγόμενη θεωρία των κατασκευάσιμων συνόλων. Οι λεπτομέρειες είναι πιο πολύπλοκες απ' όσο φαντάζεται ο **Φ**, αλλά η βασική ιδέα είναι σωστή: όταν μιλάμε για το σύνολο όλων των υποσυνόλων ενός άπειρου συνόλου, δεν είναι προφανές τι εννοούμε. Οι περισσότεροι μαθηματικοί απλώς δεν ανησυχούν γι' αυτό, και δέχονται την έννοια της «τυχούσας ακολουθίας, όπου κι αν οδηγήσει αυτή». Μια τελείως συνεπής θεωρία συνόλων όμως προκύπτει αν ερμηνεύσουμε την πράξη του δυναμοσυνόλου σαν αυτήν που δίνει όλα τα *ορίσιμα* υποσύνολα ενός συνόλου.

Φ: Ποιά είναι η διαφορά από αυτό που έλεγα;

Λ: Η διαφορά είναι ότι αντιστέκεσαι πολύ σε αυτό που ονόμασες μετα-ορισμό. Σύμφωνα τουλάχιστον με τον τρόπο που ο Gödel δημιούργησε τη θεωρία των κατασκευάσιμων συνόλων, φτιάχνεις σύνολα σε ένα επιπλέον επίπεδο κάθε φορά. Έχεις μια συλλογή από τύπους που σου επιτρέπεται να χρησιμοποιήσεις, και μέσα σ' αυτούς βάζεις όσα σύνολα έχεις δημιουργήσει ως τότε, φτιάχνοντας έτσι καινούργια. Χρησιμοποιώντας την αρίθμηση του Gödel, μπορείς ακόμα να κάνεις διαγωνοποιήσεις, αν όμως εφαρμόσεις ένα διαγώνιο επιχείρημα σε μια συλλογή συνόλων που βρίσκονται στο n-οστό επίπεδο, τότε παίρνεις ένα σύνολο στο $(n+1)$-οστό επίπεδο. Κι αυτός ο n δεν χρειάζεται να είναι κάποιος φυσικός αριθμός – μπορεί να ανεβαίνει ψηλά μέσα στους *διατακτικούς αριθμούς*. Αν συνεχίσεις να φτιάχνεις επίπεδα μέχρι τον πρώτο μη αριθμήσιμο διατακτικό, τότε τελικά έχεις δείξει ότι υπάρχουν υπεραριθμήσιμα το πλήθος υποσύνολα των φυσικών αριθμών.

Φ: Αν επιτρέπεις στον εαυτό σου μια τόσο ευέλικτη έννοια «κατασκευασιμότητας», τότε ποιός μπορεί να σου πεί ότι δεν έχεις κατασκευάσει *όλα* τα υποσύνολα των φυσικών αριθμών;

Λ: Δεν είναι εύκολο να απαντήσουμε σε αυτήν την ερώτηση. Το αξίωμα $V = L$, που ισχυρίζεται ότι κάθε σύνολο είναι κατασκευάσιμο, είναι συνεπές προς την ZFC. Κι αυτό δεν προκαλεί ιδιαίτερη έκπληξη, αφού δεν μπορείς να κατασκευάσεις ένα αντιπαράδειγμα!

Σ: Το συμπέρασμα που βγαίνει λοιπόν είναι ότι όταν οι περισσότεροι μαθηματικοί μιλούν για τους πραγματικούς αριθμούς, δεν ξέρουν για ποιό πράγμα μιλούν.

Λ: Πολύ ωμά το θέτεις. Θα προτιμούσα να πώ ότι αφήνουν αόριστο το τι εννοούν όταν μιλούν για το τυχόν υποσύνολο ενός συνόλου, επειδή δεν χρειάζεται να ανησυχούν γι' αυτό. Έχουν τα αξιώματα του πλήρως διατεταγμένου σώματος, και αν πιστεύεις στην ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων τότε θα πρέπει να πείς ότι αυτά τα αξιώματα είναι αμφίβολα, γιατί το αξίωμα της πληρότητας βασίζεται στην έννοια της τυχούσας ακολουθίας, η οποία δεν έχει εξηγηθεί πλήρως. Αν όμως αυτό που θέλεις από τα αξιώματά σου είναι ένα σύνολο κανόνων που να σου επιτρέπουν να πεις πότε μια πρόταση προκύπτει από μια άλλη, τότε τα αξιώματα του πλήρως διατεταγμένου σώματος σε καλύπτουν.

Σ: Δηλαδή, η θεωρία των πραγματικών αριθμών είναι απλώς μια συλλογή από φορμαλιστικούς χειρισμούς χωρίς νόημα;

Λ: Όχι, όχι χωρίς νόημα. Ακόμα κι αν δεν λες ακριβώς σε ποιά αντικείμενα εφαρμόζονται τα θεωρήματα της ανάλυσης, όπως ας πούμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, ξέρεις τουλάχιστον ότι εφαρμόζονται σε απλά αντικείμενα όπως η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Αν σε ενδιαφέρει να χρησιμοποιήσεις τους πραγματικούς αριθμούς με τον πιο «οικονομικό» τρόπο, αποδεικνύοντας ακριβώς ότι χρειάζεσαι για τα «συνηθισμένα» μαθηματικά και τίποτα παραπάνω, τότε κάνεις τη ζωή σου πολύπλοκη χωρίς λόγο, γιατί πρέπει να ανησυχείς για το τι είναι ορίσιμο και τα λοιπά. Είναι πολύ πιο λογικό για τους περισσότερους μαθηματικούς να αφήσουν κάπως θολή την έννοια του τυχόντος υποσυνόλου και να σκέφτονται με τελείως τυπικό τρόπο. Μπορεί έτσι να αποδεικνύεις πολύ περισσότερα από αυτά που χρειαζόσουν, γιατί όχι όμως αν στην πραγματικότητα είναι απλούστερο;

Μ: Καταλήγουμε λοιπόν στην εξής αιτιολόγηση για τους πραγματικούς αριθμούς. 1. Πρέπει να πάμε πέρα από τους ρητούς αριθμούς. 2. Όταν το κάνουμε αυτό, εισάγουμε κάποιες διαδικασίες που μας δίνουν νέους αριθμούς. 3. Τυποποιώντας αυτές τις διαδικασίες, καταλήγουμε στο αξίωμα των μονότονων ακολουθιών ή σε κάτι ισοδύναμο με αυτό. 4. Αυτό το αξίωμα δεν είναι τόσο ακριβές όσο φαίνεται, γιατί η έννοια της τυχούσας μονότονης ακολουθίας, ακόμα και της μονότονης ακολουθίας ρητών αριθμών, δεν είναι ακριβής. 5. Δεν υπάρχει λόγος να γίνει ακριβής, γιατί ξέρουμε πώς να σκεφτόμαστε μέσω των ακολουθιών. 6. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς τους οποίους χρειαζόμαστε σε κάτι, μας δίνει ταυτόχρονα κι ένα σωρό άλλους. 7. Στην πραγματικότητα, δεν ξέρουμε τι ακριβώς περιέχει αυτός ο σωρός, ούτε και είναι σαφές ότι έχει νόημα να ρωτάμε.