Απειροστικός Λογισμός Ι – 7ο Τεστ
22 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε ρητό $q\in\mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(β) Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την $|f(x)-f(y)|\leqslant 4|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

2. (**2 μον.**) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $f(x)=x$ αν $x=1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ και $f(x)=0$ παντού αλλού. Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στα σημεία $\frac{1}{3}$ και 0.

3. (3 μον.) Έστω $f : [0, 1] \to [0, 1]$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $f(x^2) = f(x)$. Αποδείξε ότι η f είναι σταθερή.

4. (2 μον.) Χρησιμοποιώντας τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας, δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x+1}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 7ο Τεστ
23 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(q) = 0$ για κάθε ρητό $q \in (a,b)$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$.

(β) Η $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής.

(γ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $|f(x)| \leqslant x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής στο 0.

2. (**2 μον.**) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $|g|$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ενώ η g να είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (3 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: αν $p, q \in \mathbb{Q}$ και $p < q$ τότε $f(p) < f(q)$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα.

4. (2 μον.) Χρησιμοποιώντας τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας, δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 7ο Τεστ
24 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $f\left(\frac{1}{n}\right)=(-1)^n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε η f είναι ασυνεχής στο 0.

(β) Αν η $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε είναι φραγμένη.

(γ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)=1$, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε: για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει $f(x)>\frac{1}{2}$.

2. (**2 μον.**) Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι: αν $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{Q}$, τότε $f(y)=g(y)$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

3. **(3 μον.)** Έστω $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f(\sqrt[n]{x}) = f(x)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

4. **(2 μον.)** Χρησιμοποιώντας τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας, δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{1 + x}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.