Απειροστικός Λογισμός Ι – 6ο Τεστ
8 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**2 μον.**) Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν ο a είναι άνω φράγμα του A και υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, αποδείξτε ότι $a = \sup A$.

2. (**3 μον.**) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}, \qquad \beta_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \qquad \gamma_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (**3 μον.**) Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) που ορίζεται από τις $x_1 = 1$ και

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + 2}{2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Ποιό είναι το όριό της;

4. (**2 μον.**) Έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \to +\infty$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x_k \leqslant x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 6ο Τεστ
9 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**2 μον.**) Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $a = \sup A$, δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2. (**3 μον.**) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}, \qquad \beta_n = n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n+1}}\right), \qquad \gamma_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (**2 μον.**) Έστω $0 < \alpha < 1$ και έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $|x_{n+1}| \leqslant \alpha |x_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.

4. (**3 μον.**) Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: η (a_n) είναι αύξουσα, η (b_n) είναι φθίνουσα και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n \leqslant 2b_n + 3$. Αποδείξτε ότι οι (a_n) και (b_n) συγκλίνουν.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 6ο Τεστ
10 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**2 μον.**) Αποδείξτε ότι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών τέτοια ώστε $q_n \to x$.

2. (**3 μον.**) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \qquad \beta_n = (\sqrt[n]{n} - 1)\sin(n^2), \qquad \gamma_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. **(3 μον.)** Έστω (x_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \to 0$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει μέγιστο στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x_n \leqslant x_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. **(2 μον.)** Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Ορίζουμε

$$x_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία x_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη.