Απειροστικός Λογισμός Ι – 5ο Τεστ
1 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (3 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $a_n \to 0$ τότε η $(|a_n|)$ είναι φθίνουσα.

(β) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

(γ) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to 1$, τότε $a_n^n \to 1$.

2. (3 μον.) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \sqrt{n^2+n} - n, \qquad \beta_n = \frac{2n-1}{3n+2}, \qquad \gamma_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (2 μον.) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία $x_n = \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n}$ και, αν ναι, βρείτε το όριο της (με $\lfloor y \rfloor$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του y).

4. (2 μον.) Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν $a_n \to a \in \mathbb{R}$ και $b_n \to b \in \mathbb{R}$ τότε $a_n + b_n \to a + b$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 5ο Τεστ
2 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (3 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η (a_n) έχει θετικούς όρους και είναι γνησίως αύξουσα, τότε $a_n \to +\infty$.

(β) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to 0$, τότε $a_n^n \to 0$.

(γ) Αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που ικανοποιούν την $a_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, τότε $a_n \to x$.

2. (3 μον.) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = (\sqrt[n]{10} - 1)^n, \qquad \beta_n = \frac{1+(-1)^n}{n}, \qquad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (2 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \to a > 0$ αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. Τι μπορείτε να πείτε αν $a_n \to 0$;

4. (2 μον.) Θεωρούμε τρείς ακολουθίες a_n, b_n, γ_n που ικανοποιούν τα εξής:

(α) $a_n \leqslant b_n \leqslant \gamma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) $a_n \to x$ και $\gamma_n \to x$ για κάποιον $x \in \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι $b_n \to x$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 5ο Τεστ
3 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (3 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $a_n \to +\infty$ τότε η (a_n) είναι κάτω φραγμένη.

(β) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to a \in \mathbb{R}$, τότε $a > 0$.

(γ) Αν $a_n \in \mathbb{Z}$ και $a_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $a_n = x$ για κάθε $n \geqslant n_0$.

2. (3 μον.) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{n^6}{6^n}, \qquad \beta_n = \frac{\text{συν}(n!)}{n}, \qquad \gamma_n = \sqrt[n]{1^4 + 2^4 + \cdots + n^4}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (2 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n \to \frac{2}{3}$. Αποδείξτε ότι $\lfloor a_n \rfloor \to 0$ (με $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x).

4. (2 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών, η οποία συγκλίνει στον $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι φραγμένη.