Απειροστικός Λογισμός Ι – 4ο Τεστ
25 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (3 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to +\infty$ τότε $\frac{1}{a_n} \to 0$.

(β) Αν η (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό και $a_{n+2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η (a_n) είναι σταθερή ακολουθία.

(γ) Αν $a_n \in \mathbb{Q}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε $x \in \mathbb{Q}$.

2. (2 μον.) Έστω $A \subset (-\infty, 0)$ και $B \subset (0, +\infty)$ δύο σύνολα πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια ώστε $b - a < \varepsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B = 0$.

3. (3 μον.) Έστω $K \subseteq (0, +\infty)$ το οποίο δεν είναι άνω φραγμένο. Ορίζουμε $M = \left\{ \frac{x}{2x+1} : x \in K \right\}$. Να βρεθεί το $\sup M$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας τον ε-χαρακτηρισμό του supremum.

4. (3 μον.) Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_1 = \frac{3}{2}$ και $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι: (α) $\frac{3}{2} \leqslant a_n \leqslant 2$ για κάθε n και (β) η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα.

Από τα (α) και (β) έπεται ότι η (a_n) συγκλίνει. Μπορείτε να βρείτε το όριό της;

Απειροστικός Λογισμός Ι – 4ο Τεστ
26 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (3 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η (a_n) είναι φραγμένη τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to 0$ τότε $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

(γ) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

2. (2 μον.) Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a - \varepsilon < b$. Αποδείξτε ότι $\sup A \leqslant \sup B$.

3. **(3 μον.)** Θεωρούμε το σύνολο $M = \left\{\frac{m}{2m+n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Να βρεθεί το $\sup M$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας τον ε-χαρακτηρισμό του supremum.

4. **(3 μον.)** Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) ως εξής: θέτουμε $a_1 = 1$ και, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{a_n+1}$. Αποδείξτε (π.χ. με επαγωγή) ότι (α) $0 \leqslant a_n \leqslant 2$ για κάθε n και (β) η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα.

Από τα (α) και (β) έπεται ότι η (a_n) συγκλίνει. Μπορείτε να βρείτε το όριό της;

Απειροστικός Λογισμός Ι – 4ο Τεστ
27 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (3 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η $(|a_n|)$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε και η (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Αν η (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε είναι φραγμένη.

(γ) Αν $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε $x \in \mathbb{Z}$.

2. (2 μον.) Έστω A, B άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής: $A \subseteq B$ και για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $b \leqslant a$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \sup B$.

3. (3 μον.) Θεωρούμε το σύνολο $M = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m^2} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Να βρεθεί το $\inf M$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας τον ε-χαρακτηρισμό του infimum.

4. (3 μον.) Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) ως εξής: θέτουμε $a_1 = \sqrt{3}$ και, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι: (α) $a_n \leqslant 3$ για κάθε n και (β) η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα.

Από τα (α) και (β) έπεται ότι η (a_n) συγκλίνει. Μπορείτε να βρείτε το όριό της;