Απειροστικός Λογισμός Ι – 3ο Τεστ
18 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leqslant \sup A$.

(β) Έστω B άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$. Τότε, $\sup B \in B$.

(γ) Το σύνολο $\Gamma = \left\{ \frac{1}{n} : n \geqslant 1 \right\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

(δ) Έστω $\Delta \subset (0, +\infty)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in \Delta$ υπάρχει $y \in \Delta$ τέτοιος ώστε $y < \frac{x}{2}$. Τότε, $\inf \Delta = 0$.

2. (**2 μον.**) Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής αποδείξτε την – αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

«Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο έχει άπειρα στοιχεία. Τότε, για κάθε $x \in A$ ισχύει $\inf A < x < \sup A$.»

3. (**2 μον.**) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων:

$$A = [-2, 0) \cup \left\{ 1 + \frac{1}{n^2+1} : n \geqslant 1 \right\} \quad \text{και} \quad B = \{ q \in \mathbb{Q} : (q-1)(q+\sqrt{2}) < 0 \}.$$

Γράψτε μόνο τις απαντήσεις σας, χωρίς αιτιολόγηση.

4. (**2 μον.**) Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι $\sup A \leqslant \sup B$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 3ο Τεστ
19 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος ρητοί $q \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιούν την $x < q < y$.

(β) Το σύνολο $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \geqslant 1\right\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

(γ) Έστω A, B μη κενά, κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $A \subseteq B$. Τότε, $\inf A \leqslant \inf B$.

(δ) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη κενό, φραγμένο και $\sup A - \inf A = 1$, τότε υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y = 1$.

2. (**2 μον.**) Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής αποδείξτε την – αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

«Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ο $x \in \mathbb{R}$ είναι άνω φράγμα του A αν και μόνο αν $\sup A \leqslant x$.»

3. (**2 μον.**) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων:

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{n^2+1} : n \geqslant 1 \right\} \cup [2,5] \quad \text{και} \quad B = \{ q \in \mathbb{Q} : 1 < q^2 < 2 \}.$$

Γράψτε μόνο τις απαντήσεις σας, χωρίς αιτιολόγηση.

4. (**2 μον.**) Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A = \inf B$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια ώστε $b - a < \varepsilon$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 3ο Τεστ
20 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω A μη κενό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $a_0 \in A$ και ο a_0 είναι άνω φράγμα του A, τότε $a_0 = \sup A$.

(β) Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $A \subseteq B$. Τότε, $\sup A \leqslant \sup B$.

(γ) Το σύνολο $\left\{1 - \frac{1}{2n} : n \geqslant 1\right\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

(δ) Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A = \inf B$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ τέτοια ώστε $b - a < \varepsilon$.

2. (**2 μον.**) Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής αποδείξτε την – αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

«Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A < \sup B$. Τότε, υπάρχει $b \in B$ ο οποίος είναι άνω φράγμα του A.»

3. (**2 μον.**) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων:

$$A = \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} : n \geqslant 1\right\} \cup [3,4) \quad \text{και} \quad B = \left\{\frac{1}{2^n} : n \geqslant 1\right\}.$$

Γράψτε μόνο τις απαντήσεις σας, χωρίς αιτιολόγηση.

4. (**2 μον.**) Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A = \sup B$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια ώστε $|b-a| < \varepsilon$.