Απειροστικός Λογισμός Ι – 2ο Τεστ
11 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει η ανισότητα $A_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

2. (**3 μον.**) Αποδείξτε ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$ ισχύει η ανισότητα

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

3. (**2 μον.**) Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$, ο 3 διαιρεί τον $n^3 + 2n$.

4. (**2 μον.**) Δίνονται $a_1, \ldots, a_n > 0$ που ικανοποιούν την $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Αποδείξτε ότι

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

Ίσως σας βοηθήσει η παρατήρηση ότι $1 + x \geqslant 2\sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 2ο Τεστ
12 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (3 μον.) Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \geqslant 1$,

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

2. (4 μον.) Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε

$$B_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει η ανισότητα

$$B_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$

3. (2 μον.) Δίνονται $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $b_1, \ldots, b_n > 0$ που ικανοποιούν την

$$1 \leqslant \frac{a_k}{b_k} \leqslant 2$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Αποδείξτε ότι

$$1 \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqslant 2.$$

4. (2 μον.) Αποδείξτε με επαγωγή ότι $2^{n-1} > n^2$ για κάθε $n \geqslant 7$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 2ο Τεστ
13 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε

$$\Gamma_n := \sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + (n+1) \cdot 2^n.$$

Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει η ισότητα $\Gamma_n = n \cdot 2^{n+1}$.

2. (**4 μον.**) Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει η ανισότητα

$$\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

3. (2 μον.) Αποδείξτε με επαγωγή ότι $n! > 2^n$ για κάθε $n \geqslant 4$.

4. (2 μον.) Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, τέτοιος ώστε ο $x + \frac{1}{x}$ να είναι ακέραιος. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geqslant 1$ ο αριθμός

$$x^n + \frac{1}{x^n}$$

είναι ακέραιος.