# ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

**ΘΕΩΡ. 1** $f, g : A = (a, x_0) \cup (x_0, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγ. :

(i) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in A$.

(ii) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Αν $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Απόδ. Επεκτείνουμε συνεχώς τις $f$, $g$ στο $(a, b)$, θέτοντας $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Τότε:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}, \quad \forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, b).$$

Επειδή $f'(x)$, $g'(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα (αφού $g'(x)$ δεν έχει ρίζα) και $g(x) - g(x_0) \neq 0$ $\forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ ισχύει ΘΜΤ-Cauchy στο $[x, x_0]$ ή στο $[x_0, x]$, άρα

$$\exists\, \xi_x \in (x, x_0) \text{ ή } \xi_x \in (x_0, x) :$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \quad (*)$$

Έστω τυχαία $(x_n)$ στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ με $x_n \to x_0$

$\Rightarrow x_n < \xi_{x_n} < x_0$ ή $x_0 < \xi_{x_n} < x_n \Rightarrow \xi_n \to x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}}_{(?)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \overset{(*)}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\xi_{x_n})}{g'(\xi_{x_n})} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Αν

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \overset{AM}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \overset{AM}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ. 2}}$ $f, g: (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγ. με

(i) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, +\infty)$

(ii) $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Αν $\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. ■

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ. 3}}$ $f, g: (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγ. με:

(i) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty$

Αν $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. ■

SOS! ΔΕΝ εφαρμόζουμε dlH αν δεν ελεγχθεί η υπόθ. (ii) (και στα 2 θεωρήματα)! δηλ. ΔΕΝ εφαρμόζουμε dlH αν δεν έχουμε απροσδιόριστη μορφή.

Πχ: $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$.

Ζητάω $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

Παρατηρώ ότι $\exists \lim_{x \to 2} f(x) = 8$, $\exists \lim_{x \to 2} g(x) = 4$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{8}{4} = 2$ (όχι απροσδ.)

ΟΜΩΣ:

$f'(x) = 3x^2$,

$g'(x) = 2x$ και

$\lim_{x \to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3 \cdot 4}{4} = 3$.

$\boxed{\text{Ασκ}}$ Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x}.$$

(μηδεν.) × (φραγμ.)

Απαντ. $\dfrac{x-\cos x}{x} = 1 - \dfrac{\cos x}{x} \longrightarrow 1-0=1.$

Όμως: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \xrightarrow[\text{Hôp}]{\text{de l'}} \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x}{1}$ $\nexists$

Κανόνας de l'Hôpital: Αν $\exists \displaystyle\lim_{x\to(?)}\frac{f'(x)}{g'(x)} \Longrightarrow$ ($\not\Longleftarrow$)

$\exists \displaystyle\lim_{x\to(?)}\frac{f(x)}{g(x)}$ (και είναι ίσα.)

ΜΟΡΦΕΣ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑΣ

$\frac{0}{0}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$ γνωστά. Άλλες μορφές: (1) $0(\pm\infty)$ $\to \frac{0}{0}$, $\to \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

(2) $+\infty+(-\infty)$

$$\lim \underset{\downarrow\, +\infty}{f(x)} + \underset{\downarrow\, -\infty}{g(x)} = \lim\left(\frac{f(x)g(x)}{g(x)} + \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right) =$$

$$= \lim\left(\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)}\right)\cdot f(x)g(x)$$

(3) $0^0$ $\quad f(x)\to 0,\ g(x)\to 0 \quad \lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{(\ln f(x))\cdot g(x)}$

$$= e^{\lim(\ln f(x))\cdot g(x)} = \dots$$

(4) $(+\infty)^0$ $\quad f(x)\to+\infty \quad g(x)\to 0$

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)\cdot g(x)}$$

(5) $1^{\pm\infty}$ $\quad f(x)\to 1 \quad g(x)\to\pm\infty.$

$$f(x)^{g(x)} = e^{(\ln f(x))\, g(x)}$$

Πχ.

(1) $\lim_{x\to 0} x^x = \lim e^{x\ln x} \overset{\text{exp συνεχής}}{=} e^{\lim_{x\to 0} x\ln x} =$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x}\right) \overset{dLH}{=}$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0} (-x)\right) = \exp 0 = 1.$$

(2) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} =$$

$$= \frac{0}{1+1+0} = 0.$$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ}}$ (Στασιμ. σημασία της $f''$).
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ : $f'(x_0) = 0$.
(i) Αν $\exists\, f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ έχει τοπ. ελάχιστο στο $x_0$.
(ii) Αν $\exists\, f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ έχει τοπ. μέγιστο στο $x_0$.

Σημείωση: Αν $f''(x_0) = 0$ ή αν $\nexists\, f''(x_0) \rightsquigarrow$ δεν γνωρίζουμε!

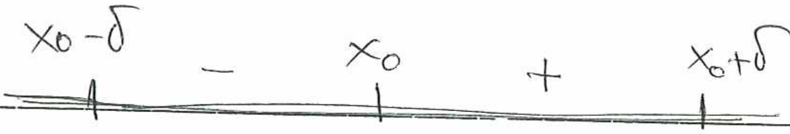
Αποδ (i)

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$$

$\Rightarrow \exists\, \delta>0 : \forall\, x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x\neq x_0$ $\quad f'(x)$, $x-x_0$ ομόσημα

$\Rightarrow f'(x)>0$, για $x>x_0$ και

$\Rightarrow f'(x)<0$ για $x<x_0$




Έστω $y\in(x_0-\delta, x_0)$. Απο ΘΜΤ στο $[y, x_0]$:

$$\exists\, x\in(y,x_0):\quad f'(x)=\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y)>f(x_0)$$

Έστω $y\in(x_0, x_0+\delta)$. Απο ΘΜΤ στο $[x_0, y]$:

$$\exists\, x\in(x_0,y):\quad f'(x)=\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y)>f(x_0).$$

Δηλ. $\forall\, y\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$: $\quad f(y)\geq f(x_0)$.
Άρα έχει ελάχιστο στο $x_0$ $\blacksquare$

# ΚΟΙΛΕΣ – ΚΥΡΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Υπενθ. Η ευθεία $\varepsilon(x)=\lambda x+\mu$ έχει κλίση (= παράγωγο) $\varepsilon'(x)=\lambda$ και στο $x_0\in\mathbb{R}$ παίρνει τιμή $y_0=\lambda x_0+\mu$.

Επομένως η ευθεία που περνά από δεδομένο ζεύγος $(x_0,y_0)$ και έχει κλίση $\lambda$, είναι η ευθεία

$$\varepsilon(x)=\lambda x+\mu=\lambda x+y_0-\lambda x_0=\lambda(x-x_0)+y_0.$$

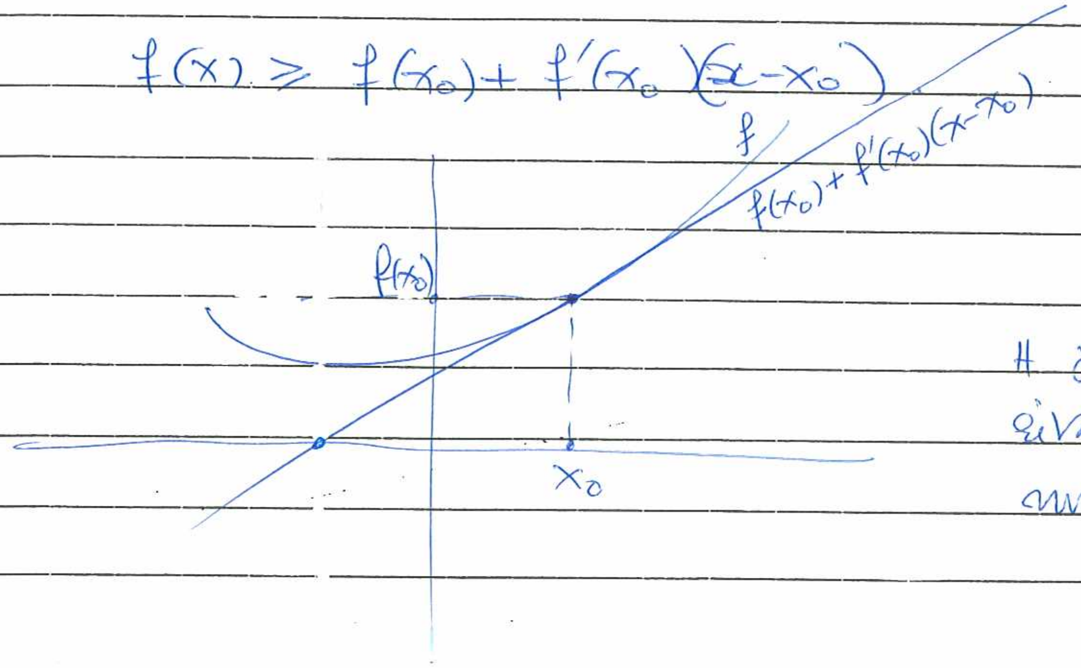
Άρα: αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0\in(a,b)$, τότε η εφαπτομένη της γραφ. παράστασης της $f$ στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ έχει κλίση $\lambda=f'(x_0)$, δηλ. είναι η ευθεία

$$\varepsilon(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

κυρτές / κοίλες

ΟΡΣ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.
$f$ λέγεται κυρτή στο $(a,b)$ αν $\forall x_0\in(a,b)$

$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$




Η γραφ. παρ. είναι πάνω από την εφαπτομένη.

λέγεται κοίλη στο $(a,b)$ αν $\forall x_0 \in (a,b)$

$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

ομοίως κοίλη/κυρτή $\Leftrightarrow$ ανισότητα γνήσια, $\forall x \neq x_0$

$f$ έχει σημείο καμπής στο $x_0$ αν $\exists\, \delta > 0$:

γν. κοίλη στο $(x_0-\delta, x_0)$ και γν. κυρτή στο $(x_0, x_0+\delta)$

ή αντίστροφα.

$\boxed{\text{Θεωρ}}$ $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.

(i) $f'$ $\uparrow / \uparrow$ $\Rightarrow$ $f$ κυρτή / γν. κυρτή στο $(a,b)$.

(ii) $f'$ $\downarrow / \downarrow$ $\Rightarrow$ $f$ κοίλη / γν. κοίλη στο $(a,b)$.

Αποδ (i) $x, x_0 \in (a,b)$, $x \neq x_0$. Από Θ.ΜΤ

$\exists\, \xi \in (x_0, x)$ (ή στο $(x, x_0)$):

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-x_0) \cdot f'(\xi) = f(x) - f(x_0).$$

(1). $\xi \in (x, x_0) \Rightarrow f'(\xi) \leq f'(x_0) \xRightarrow{x-x_0<0}$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \underbrace{(x-x_0)}_{<0} f'(\xi) \geq f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

(2) $\xi \in (x_0, x) \Rightarrow f'(\xi) \geq f'(x_0) \xRightarrow{x-x_0>0}$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x-x_0) \cdot f'(\xi) \geq f'(x_0) \cdot (x-x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$ ∎

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ}}$. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη.
(α) Αν $f''(x)>0$ $\forall x\in(a,b)\Rightarrow f$ γν. κυρτή.
(β) Αν $f''(x)<0$ $\forall x\in(a,b)\Rightarrow f$ γν. κοίλη.

Αποδ. (α) $f''(x)>0 \Rightarrow f' \uparrow \Rightarrow f$ γν. κυρτή.
(β) ομοίως. ∎

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ}}$ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγ.
Αν έχει σημείο καμπής στο $x_0\in(a,b)\Rightarrow f''(x_0)=0$.
Θέτω $g(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$:
δύο φορές παραγωγίσιμη.

$g(x_0)=0$
$x<x_0\Rightarrow g(x)<0$ και
$x>x_0\Rightarrow g(x)>0$.
$\Rightarrow \nexists$ ακρότατο της $g$ στο $x_0$.

$g'(x_0)=f'(x_0)-0-f'(x_0)\cdot 1=0$.

$g''(x_0)=f''(x_0)$.

Αν $g''(x_0)>0\Rightarrow g$ έχει τοπ. ελάχιστο στο $x_0$, άτοπο.
Αν $g''(x_0)<0\Rightarrow$ — " — μέγιστο — " — " .
Άρα $g''(x_0)=f''(x_0)=0$. ∎

## ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

ΟΡΙΣ 1. $f: (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ λέμε ότι:

Η ευθεία $y(x) = ax + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f$ στο $+\infty$ $\Leftrightarrow$

$$\exists \lim_{x\to+\infty} (f(x) - y(x)) = 0.$$

Αν $a=0$, η ευθεία $y(x) = \beta$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη. Τότε

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΤ 1. Αν $\exists$ πλάγια ασύμπτ $\Rightarrow$ μοναδική.

Πράγματι, αν

$$\left.\begin{array}{l}\lim (f(x) - y_1(x)) = 0 \\ \lim (f(x) - y_2(x)) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{+\infty} (y_1 - y_2)(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} [(a_1 - a_2)x + (\beta_1 - \beta_2)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$$

2. Αν $\exists$ πλάγια ασύμπτ. $ax+\beta$ στο $+\infty$ $\Rightarrow$

$$\lim_{+\infty} f(x) - ax - \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{\beta}{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

οπότε και

$$\lim_{+\infty} f(x) - ax - \beta = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \beta.$$

ΑΝΑΛΟΓΑ στο $-\infty$

(5)

ΟΡΣ (2) $f: (a, x_0) \cup (x_0, \beta) \to \mathbb{R}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0$ αν

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

$\boxed{\text{Μελέτη συνάρτησης}}$

(1) Πεδίο Ορσ (αφαιρούνται(;) σημεία αν ∄
- παρονομαστές
- υπόρριζα
- λογάριθμοι)

(1α) $f(0)$, ρίζες, πρόσημο της $f$

(1β) άρτια / περιττή / περιοδική

(2) $f$ συνεχής / παραγωγίσιμη.
$f'(x) = 0 \leadsto$ ρίζες, πρόσημο της $f'$

(3) $f''(x) = 0 \leadsto$ ρίζες, πρόσημο

(4) Ασύμπτωτες.

(5) Συμπεράσματα σε πίνακα +
+ γραφ. παράσταση.

# ΜΑΘΗΜΑ 17

## ΙΔΙΟΤΗΤΑ DARBOUX

Γνωρίζουμε ότι, αν $I$ = διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε (ΘΕΤ)

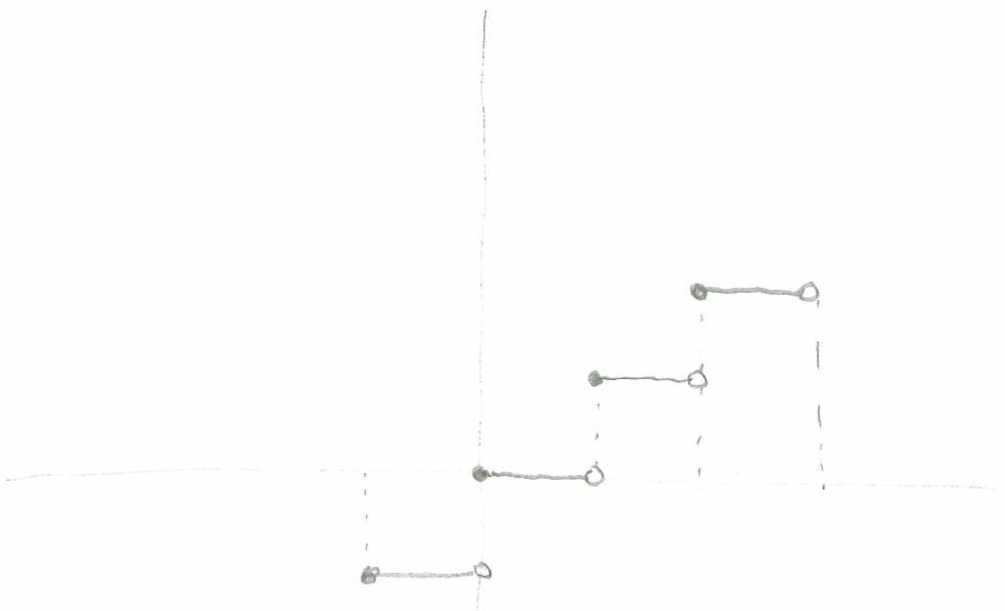
(*) $\forall\, x < y \in I$, $\forall\, \rho$ μεταξύ $f(x), f(y)$, $\exists\, \xi \in (x,y)$: $f(\xi) = \rho$.

Ονομάζουμε την (*) <u>ιδιότητα Darboux</u>.

Η ID ισχύει για τις συνεχείς, αλλά η συνέχεια δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση.

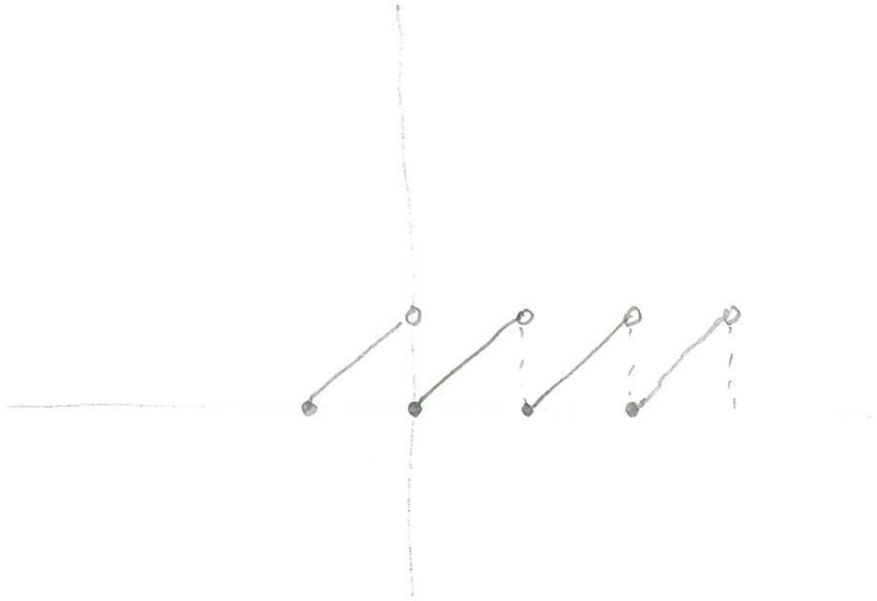
<u>Π.χ.</u>

(1) $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$ : όχι συνεχής



$I = \mathbb{R}$, $f(I) = \mathbb{Z}$, $\forall\, a \in \mathbb{Z}$ : $a = f(a)$, $a+1 = f(a+1)$ αλλά $\nexists\, x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \underbrace{a + 1/2}_{\rho} \in (a, a+1)$

(2) $g(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$, όχι συνεχής



$I = \mathbb{R}$, $g(I) = [0,1) =$ διάστημα και

$\forall\, x < y \in \mathbb{R}$, $\forall\, \rho$ ανάμεσα στα $g(x), g(y) \in [0,1)$

$\exists\ z := [x] + \rho \in (x,y)$ : $g(z) = \rho$.

Θδο οι παράγωγοι συναρτήσεων, ακόμη και όταν δεν είναι συνεχείς, έχουν την ID.

<u>ΘΕΩΡ</u> Έστω $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγ. $\Rightarrow$ η $f'$ έχει την ID.

<u>Απόδ</u> Έστω $x < y$ στο $(a,b)$ και έστω $f'(x) < \rho < f'(y)$. Ζητούμε $z \in (x,y)$ με $f'(z) = \rho$.

Θεωρούμε την $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ με

$$g(t)=f(t)-\rho t$$

$$\Rightarrow \exists g'(t)=f'(t)-\rho,\quad \forall t\in(a,b)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g'(x)=f'(x)-\rho<0 \\ g'(y)=f'(y)-\rho>0 \end{cases}$$

Για το ζητούμενο $z\in(x,y)$ θα είναι

$$g'(z)=f'(z)-\rho=0.$$

Παρατηρούμε ότι:

→ $g$ παραγωγ. στο $x\Rightarrow$

$$\exists \lim_{h\to 0^+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)<0$$

Απο ορσ. ορίου, για $\varepsilon=-\frac{g'(x)}{2}>0$

$\exists\ 0<\delta_1<y-x:\ \forall h\in(0,\delta_1):$

$$g'(x)-\varepsilon<\frac{g(x+h)-g(x)}{h}<g'(x)+\varepsilon=\frac{g'(x)}{2}\underline{<0}$$

Άρα για $h=\delta_1/2$ και $x_1=x+h=x+\delta_1/2$

$$\frac{g(x_1)-g(x)}{\delta_1/2}<0\Rightarrow$$

$$\boxed{g(x_1)<g(x)}$$

Ανάλογα:

→ $g$ παραγ. στο $y \Rightarrow$

$$\exists \lim_{h \to 0^-} \frac{g(y+h)-g(y)}{h} = g'(y) \Rightarrow$$

για $\varepsilon = \frac{g'(y)}{2} > 0, \ \exists \ 0 < \delta_2 < y-x : \ \forall h \in (-\delta_2, 0):$

$$g'(y)+\varepsilon > \frac{g(y+h)-g(y)}{h} > g'(y)-\varepsilon = \frac{g'(y)}{2} > 0$$

Άρα για $h = -\delta_2/2$ και $y_1 = y+h = y - \delta_2/2$:

$$\frac{g(y_1)-g(y)}{-\delta_2/2} > 0 \Rightarrow \boxed{g(y_1) < g(y)}$$

Συμπ: $g$ δεν παίρνει min ούτε στο $x$ ούτε στο $y$.

Όμως $g$ παραγ $\Rightarrow$ $g$ συνεχής $\Rightarrow$ παίρνει min στο $[x,y] \Rightarrow \exists \ z \in (x,y): \ g(z) \leq g(t), \ \forall t \in [x,y]$.

$\xRightarrow{\text{Fermat}}$ $g'(z) = f'(z) - \rho = 0$. ∎