# ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

ΟΡΣ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. Λέμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$, αν

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{παράγωγος της } f \text{ στο } x_0}\in\mathbb{R}$$

Παρατ. Στα άκρα κλειστού διαστήματος $[a,b]$ μπορεί να οριστεί (πλευρική) παράγωγος από το πλευρικό όριο.

ΠΑΡΑΔ.

(1) $f(x)=c$, $x_0\in\mathbb{R}$.

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c'=0}$$

(2) $f(x)=x$, $x_0\in\mathbb{R}$.

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x'=1}$$

(3) $f(x)=x^2$, $x_0\in\mathbb{R}$.

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(x^2)'=2x}$$

(4) $f(x)=|x|$, $x_0\in\mathbb{R}$.

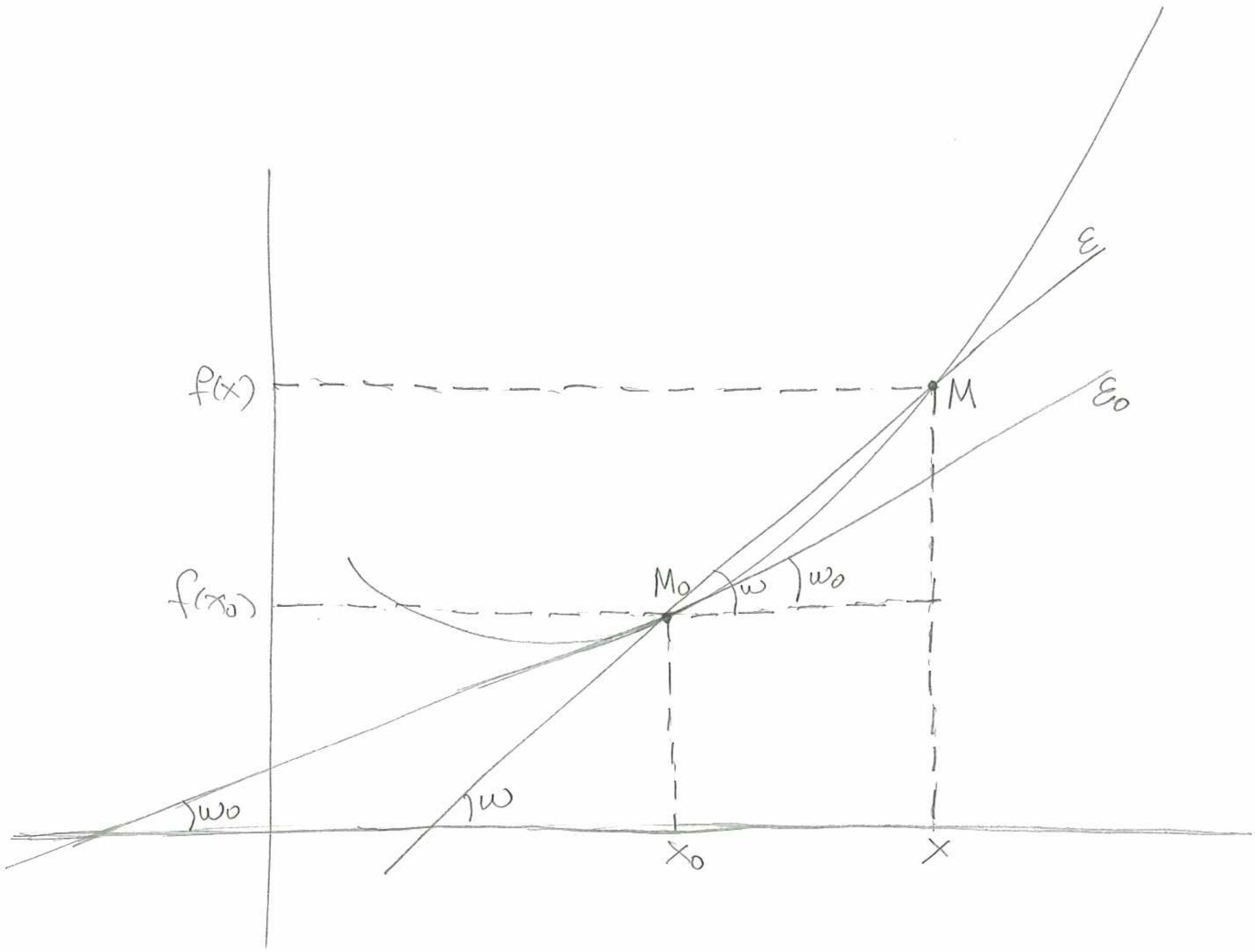
Στο $(-\infty,0)$: $f(x)=-x\Rightarrow\cdots\Rightarrow f'(x)=-1$.

Στο $(0,+\infty)$: $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$.

Για $x_0=0$:

$$-1=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-}=1\Rightarrow\nexists f'(0).$$

# ΓΕΩΜ. ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ $f'(x_0)$




$$x \to x_0 \Rightarrow M = (x, f(x)) \longrightarrow M_0 = (x_0, f(x_0))$$

$$\Rightarrow \varepsilon \longrightarrow \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \omega \longrightarrow \omega_0$$

$$\Rightarrow \text{εφ}\,\omega \longrightarrow \text{εφ}\,\omega_0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow \text{εφ}\,\omega_0 \equiv f'(x_0)$$

(D3)

(ζ) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$  Είναι παραγωγίσιμη στο 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \ ?$$

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{x^2}{x}=x & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases} \Rightarrow$$

$$0\le \left|f(x)/x\right| \le |x| \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$$
$\downarrow$ 0 $\qquad$ $\downarrow$ 0

ΠΡΟΣΟΧΗ! Η f(x) δεν είναι πουθενά συνεχής εκτός από το 0!

(η) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x^3 & x>0\end{cases}$

$x_0<0 \Rightarrow f(x)\equiv x^2$ και $f'(x_0)=2x_0$
$x_0>0 \Rightarrow f(x)\equiv x^3$ και $f'(x_0)=3x_0^2$

$$\exists?\ \lim_{x\to}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = ?$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0. \\ \lim_{x\to +}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim \frac{x^3}{x} = \lim x^2 = 0.\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ΘΕΩΡ. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$.
Αν $f$ παραγωγίσιμη στο $x_0$ $\Rightarrow$ $f$ συνεχής στο $x_0$.

Αποδ.

$$\left.\begin{aligned}&\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in\mathbb{R}\\ &\exists \lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0\end{aligned}\right\}\overset{\text{πολ/ζω}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0\cdot f'(x_0)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)+f(x_0)=0+f(x_0)$$

$$=f(x_0)\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f$ συνεχής στο $x_0$. ∎

## ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

**Θεωρ.** $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, $f,g$ παραγ. στο $x_0$. Τότε:

(i) $f+g$ παραγ. στο $x_0$ και $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

(ii) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$: $\lambda f$ παραγ. στο $x_0$ και $(\lambda f)'(x_0)=\lambda\cdot f'(x_0)$

(iii) $fg$ —"— και $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+$
$+f(x_0)g'(x_0)$.

(iv) Αν $g(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)\Rightarrow$
$f/g$ παραγ. στο $x_0$ και $(f/g)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

**Απόδ.**

(iii)
$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=f(x)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)$$
$$\longrightarrow f(x_0)\cdot g'(x_0)+f'(x_0)\cdot g(x_0).$$

(iv) Αρκεί νδο $1/g$ παραγωγίσιμη:
$$\frac{(1/g)(x)-(1/g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{1/g(x)-1/g(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(x_0)-g(x)}{(x-x_0)\cdot g(x)g(x_0)}$$
$$\longrightarrow -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.\ \blacksquare$$

Παρατ. Καραθεοδωρή: $f$ παραγωγίσιμη στο $x_0$

$\Rightarrow$ η συνάρτηση $\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$ συνεχής στο $x_0$.

Αντίστροφα: αν $\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0 \\ \lambda \in \mathbb{R}, & x = x_0 \end{cases}$ συνεχής στο $x_0$

$\Rightarrow$ $f$ παραγ. στο $x_0$ με $f'(x_0) = \lambda$ ∎

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ}}$ (κανόνας αλυσίδας)

$f: (a,b) \to (c,d)$ παραγ. στο $x_0 \in (a,b)$ και
$g: (c,d) \to \mathbb{R}$ — " — $f(x_0) = y_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ παραγ. στο $x_0$ και

$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Απόδ. Έστω $\psi$ η συνάρτηση Καραθεοδωρή για την $g$:

$\psi(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & y \neq y_0 \\ g'(y_0), & y = y_0 \end{cases}$ Τότε:

$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} \overset{(*)}{=} \psi(f(x)) \cdot \varphi(x) \longrightarrow$

$\longrightarrow g'(y_0) \cdot f'(x_0)$.

(*) Πράγματι:

– αν $f(x) \neq f(x_0) \Rightarrow \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$

$= \psi(f(x)) \cdot \varphi(x)$

– αν $f(x) = f(x_0) \Rightarrow 0 = 0$. ∎

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ}}$ (παράγωγος αντίστροφης)

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 1-1, συνεχής, παραγωγίσιμη στο $x_0\in(a,b)$ και $f'(x_0)\neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και

$$(f^{-1})'\big(f(x_0)\big)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Απόδ. Γνωρίζουμε ότι $f$ γν. μονότονη, έστω $f\uparrow$.
Επίσης

$$\exists \lim_{x\to x_0}\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\substack{>0\\ \text{για } \uparrow}}=\underbrace{f'(x_0)}_{\substack{>0\\ \text{για } \uparrow}}\neq 0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

Παρατηρώ ότι

$$\begin{Vmatrix} x_n \xrightarrow{x_n\neq x_0} x_0 & \Longleftrightarrow & f(x_n)\to f(x_0) \\ \| \quad\quad \| & & \| \quad\quad \| \\ f^{-1}(y_n)\to f^{-1}(y_0) & \Longleftrightarrow & y_n \xrightarrow[y_n\neq y_0]{} y_0 \end{Vmatrix}$$

$$\Rightarrow \exists \underbrace{\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}}_{(f^{-1})'(y_0)}=\frac{1}{f'(x_0)} \quad ■$$

$\boxed{\text{Παρατ}}$: Αν $f'(x_0)=0 \Rightarrow \nexists\,(f^{-1})'(y_0)$

Πράγματι, αν υπήρχε, θα ήταν

$(id)'(x_0)=1$
$=(f^{-1}\circ f)'(x_0)=(f^{-1})'(f(x_0))\cdot f'(x_0)=\lambda\cdot 0=0$, άτοπο. ■

**ΟΡΣ** $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη $\forall x\in(a,b) \Rightarrow$
$f':(a,b)\to\mathbb{R}: x\mapsto f'(x)$ λέγεται
παράγωγος συνάρτηση της $f$.

Αν $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγ. $\forall x\in(a,b) \Rightarrow$
ορίζεται η 2η παράγωγος της $f$
$$f''=(f')'.$$
Επαγωγικά $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$.

$\exists f^{(n)} \Rightarrow f$ είναι n-φορές παραγωγίσιμη.
$\exists f^{(n)}(x_0)\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f$ απειροέσιστα παραγωγίσιμη στο $x_0$.

**Π.χ.** $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$.

Ισχύει: $$a_k=\frac{p^{(k)}(0)}{k!}\quad \forall k\le n.$$

---

Σκοπός μας τώρα είναι νδο η εκθετική συνάρτηση $\exp(x)=e^x$ είναι παραγωγίσιμη.

**Λήμμα 1**
$\forall x\in(-1,0)\cup(0,1)$:
$$x+1\le e^x\le\frac{1}{1-x}$$

**Απόδ.**
→ Για $x=1/n$, $n\ge2$:
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \Rightarrow 1+\frac{1}{n}<e^{1/n}<1+\frac{1}{n-1}$$
$$1+x=1+\frac{1}{n}<e^{1/n}<1+\frac{1}{n-1}=\frac{n}{n-1}=\frac{1}{1-1/n}=\frac{1}{1-x}.$$

→ Για $x = m/n$, $1 \leq m < n$:

Ισχύουν οι ανισότητες:

$a \geq -1 \Rightarrow (1+a)^n \geq 1+na$ (Bernoulli) (α)

$0 < a < 1/n \Rightarrow (1+a)^n < \frac{1}{1-na}$ (β)

Άρα

$$1+x = 1+\frac{m}{n} \underset{\text{Bern}}{\leq} \left(1+\frac{1}{n}\right)^m < e^{m/n} = e^x$$

Παρατηρούμε ότι $1/n < 1/m \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: \underbrace{1/kn}_{a} < 1/km \underset{\text{ανισ.}}{\overset{\beta'}{\Longrightarrow}}$

$$\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{km} < \frac{1}{1-km/kn} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow$$

Άρα:

$$e^x = \left[\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}\right]^{m/n} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{km} \leq \frac{1}{1-x}.$$

→ Για τυχαίο $x \in (0,1)$ ∃ ακολ. ρητών $q_n \to x \Rightarrow$

$$1+q_n \leq e^{q_n} < \frac{1}{1-q_n} \underset{\text{συνεχής}}{\overset{\exp}{\Longrightarrow}}$$

$$\Rightarrow 1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

→ Για $x \in (-1,0)$: $-x \in (0,1) \Rightarrow$

$$0 < 1-x < e^{-x} < \frac{1}{1+x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-x} > \frac{1}{e^{-x}} = e^x > 1+x \quad \blacksquare$$

D10

Λήμμα 2

$$\exists \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Απόδ.

Από τις ανισότητες του Λ.1, για $x\in(-1,0)\cup(0,1)$, έχουμε:

$$1+x<e^x<\frac{1}{1-x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x<e^x-1<\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$$

→ Για $x>0$, διαιρώντας με $x$ παίρνουμε

$$1<\frac{e^x-1}{x}<\frac{1}{1-x}\Rightarrow 1\leq \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\leq \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x}=1$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

→ Για $x<0$, διαιρώντας με $x$ παίρνουμε:

$$1>\frac{e^x-1}{x}>\frac{1}{1-x}\Rightarrow 1\geq \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}\geq \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x}=1$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1.$$ ∎

ΠΡΟΤΑΣΗ $e^x$ παραγωγίσιμη και $(e^x)'=e^x$.

Απόδ.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}\cdot e^{x_0}=1\cdot e^{x_0}=e^{x_0}.$$ ∎

D10α

Άσκηση $\alpha>0$

(i) ΝΔο $a^x$ συνεχής

(ii) ΝΔο $a^x$ παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε την $(a^x)'$.

Απαντ.

(i) $a^x=(e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$ = σύνθεση συνεχών $\Rightarrow$ συνεχής

(ii) $a^x = e^{x\ln a}$ = σύνθεση παραγωγίσιμων

$$x \xrightarrow{\gamma} x\ln a \xrightarrow{\exp} e^{x\ln a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^x)' = (\exp\circ\gamma)'(x) = \exp(\gamma(x))\cdot\gamma'(x) =$$

$$= e^{\gamma(x)}\cdot\ln a = e^{x\ln a}\cdot\ln a =$$

$$= a^x\ln a.$$

# ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ – ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ.

**Προτ.** $\ln : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και
$$(\ln)'(y) = 1/y.$$

**Αποδ.** exp παραγωγίσιμη με $(\exp)'(x) = e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Η $\ln = e$ είναι παραγωγίσιμη σαν αντίστροφή της. Αν $y = e^x$ ($\Leftrightarrow x = \ln y$), τότε

$$(\ln)'(y) = \ln(\exp(x)) = \frac{1}{(\exp)'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}. \qquad \blacksquare$$

## Αντίστροφες τριγωνομετρικών

### (α) Τόξο ημιτόνου

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$ περιοδική με (ελάχιστη θετική) $T = 2\pi$.

$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1,1]$ είναι 1-1, επί, $\uparrow$ και παραγωγίσιμη ($\Rightarrow$ συνεχής) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \underbrace{(\sin)^{-1}}_{=:\arcsin} : [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

που επίσης είναι 1-1, επί, $\uparrow$, συνεχής, και παραγωγίσιμη όταν $(\sin)'(x) \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 0$ $\Rightarrow x \neq \pm \pi/2$.

Δηλ. είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και

$$(\arcsin)'(\underbrace{y}_{\sin x}) = \frac{1}{(\sin)'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$.

$\Downarrow$

$y^2 = \sin^2 x \Rightarrow 1 - y^2 = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x > 0$ στο $(-\pi/2, \pi/2)$.

$$\boxed{(\arcsin)'(y) = 1/\cos x = 1/\sqrt{1-y^2}.} \quad \boxed{y \in (-1,1)}$$

(β) Τόξο συνημιτόνου

$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ περιοδ. με (ελαχ. θετική) περίοδο $2\pi = T$.
$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ 1-1, επί, $\downarrow$, (συνεχής &) παραγ.

$\Rightarrow \underbrace{(\cos)^{-1}}_{\arccos} : [-1,1] \to [0,\pi]$ 1-1, επί, $\downarrow$ συνεχής & παραγ. όπου $(\cos)'(x) \neq 0 \Rightarrow$
$-\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, \pi$.

$$\Rightarrow (\arccos)'(y) = \frac{1}{(\cos)'(x)} = -\frac{1}{\sin x}$$

$y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$

$\Downarrow$

$y^2 = \cos^2 x \Rightarrow 1 - y^2 = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x > 0$
στο $(0,\pi)$.

Άρα

$$\boxed{(\arccos)'(y) = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},}$$

$y \in (-1,1)$.

Τόξο εφαπτομένης

$\tan : \mathbb{R} - \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ περιοδική, κλπ.

$\tan : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\uparrow$, επί, διαφορ. ($\Rightarrow$ συνεχής) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \underbrace{(\tan)^{-1}}_{\arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ $\uparrow$, 1-1, επί, συνεχής & διαφ. όπου $(\tan)'(x) \neq 0$.

$$(\tan)'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin'(x) \cdot \cos x - \sin x \cos'(x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \neq 0.$$

Άρα arctan παντού παραγωγίσιμη με

$$\boxed{(\arctan)'(y) = \frac{1}{(\tan)'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}}$$

$\forall y \in \mathbb{R}$.

**ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ**

**Λήμμα** $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγ., $\uparrow$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Απόδ. $f \uparrow \Rightarrow f(x) - f(x_0)$ και $x - x_0$ ομόσημα ∎

**SOS!** $f \uparrow \not\Rightarrow f'(x) > 0$ πχ: $f(x) = x^3$.

Ισχύει το αντίστροφο? $f'(x) \geq 0 \overset{?}{\Rightarrow} f \uparrow$ ??

<u>Λήμμα:</u> $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ και $f'(x_0) > 0$. Τότε $\exists\, \delta > 0 : (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$ και $f(x) < f(x_0)\ \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0)$

$f(x) > f(x_0)\ \forall\, x \in (x_0, x_0+\delta)$.

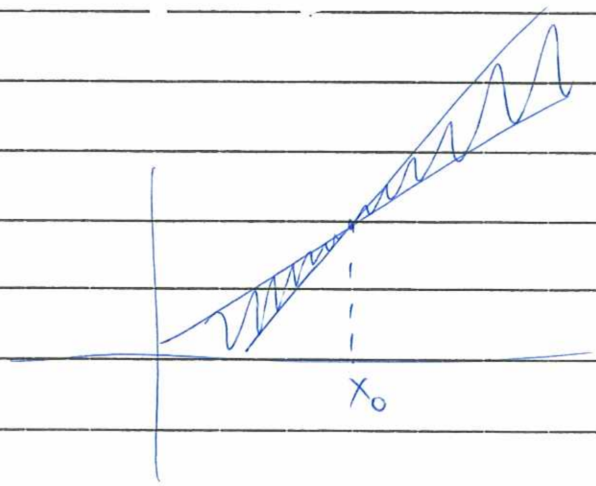
<u>Απόδ.</u> $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \delta>0 : (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$ και

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \quad \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta),\ x \neq x_0.$$

Δηλ. $f(x)-f(x_0)$ και $x-x_0$ ομόσημα. ■

<u>Προσοχή!</u> Δεν βγάλαμε ότι η $f$ μονότονη: Μπορεί



**ΟΡΣ** $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Λέμε ότι η $f$ έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0$, αν $\exists\, \delta > 0$:

$$\underbrace{\text{αν } x \in I \text{ και } |x - x_0| < \delta}_{} \Rightarrow f(x_0) \geq f(x).$$

$$\Updownarrow$$

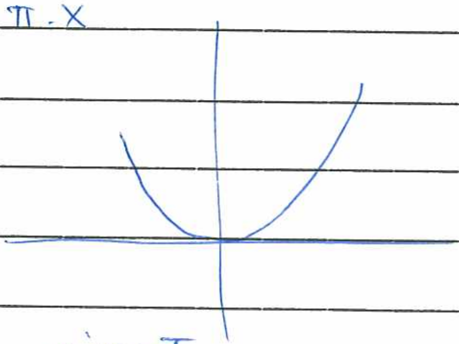
$$x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Ομοίως $f$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0$ $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \delta > 0$:

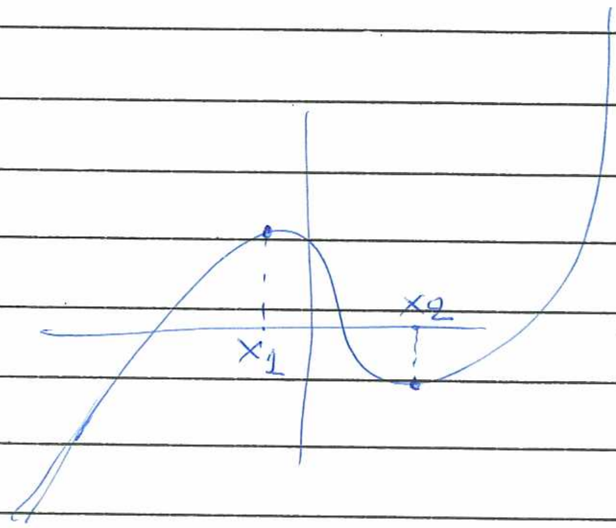
$$x \in I \;\&\; |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

Αν $f$ έχει τοπ. μέγιστο ή ελάχιστο στο $x_0$ λέμε ότι η $f$ έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0$.

π.χ

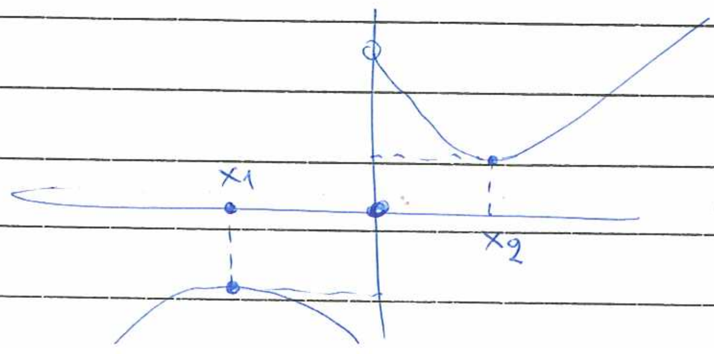


$x^2$ έχει ελάχιστο.




Εχει τοπ. μέγιστο στο $x_1$ και τοπ. ελάχιστο στο $x_2$.

Αν όχι συνεχής μπορεί τοπ. μέγιστο < τοπ. ελαχ.




Πίσω

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ (Fermat)

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in (a,b)$ και $f$ παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Αποδ Έστω ότι έχει τοπ. μέγιστο. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a,b)$ και

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$.

Άρα

$$\lim_{x \to x_0^-} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\leq 0} \geq 0.$$ ενώ

$$\lim_{x \to x_0^+} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0} \leq 0$$

Υπόθ. $\Rightarrow \exists\ f'(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x_0^+} = \lim\limits_{x_0^-} \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

ΟΡΣ Έστω $f : I \to \mathbb{R}$. Ένα εσωτερικό σημείο $x_0 \in I$ λέγεται κρίσιμο σημείο για την $f$ αν $f'(x_0) = 0$.

ΣΥΜΠ: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ έχει max, min.

$f(x_1)$ $f(x_2)$

(i) $x_1, x_2$ άκρα ή

(ii) $f$ δεν παραγωγίζεται στα $x_1, x_2$ ή

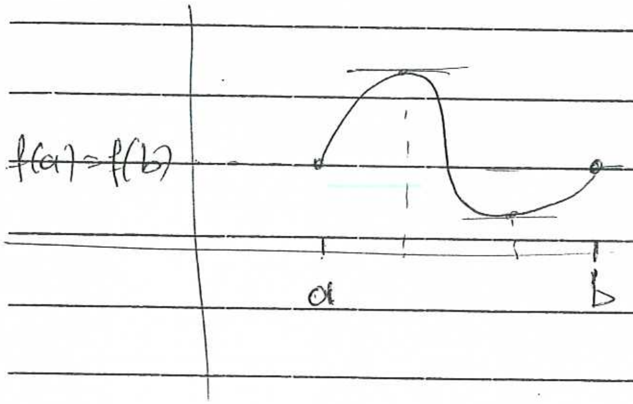
(iii) $f'(x_1) = 0 = f'(x_2)$.

Λήμμα (Θ. Rolle)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ & παραγ. στο $(a,b)$, με $f(a)=f(b)$. Τότε $\exists\, x_0\in(a,b)$:

$$f'(x_0)=0$$

Απόδ




(1) Αν $f$ σταθ $\Rightarrow f(x)=f(a)=f(b)\quad \forall x\in[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=0 \quad \forall x\in[a,b]$.

(2) $f$ όχι σταθ $\Rightarrow \exists\, x_1\in(a,b)$: $f(x_1)>f(a)=f(b)$

έστω

$f$ παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποιο $x_0\in(a,b)$.

$\Rightarrow$ (Fermat) $f'(x_0)=0$. ∎

$\boxed{\text{Θ. Μ. Τ.}}$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ & παραγ. στο $(a,b)$

$\Rightarrow \exists\, x_0\in(a,b)$:

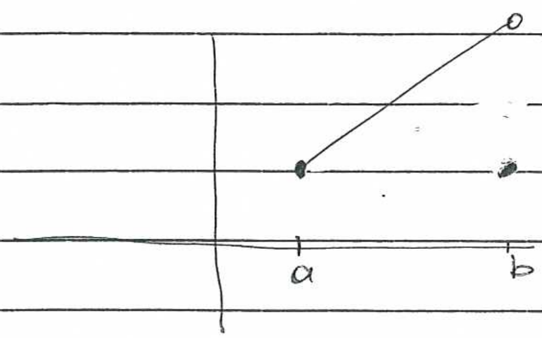
$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Απόδ Rolle για την

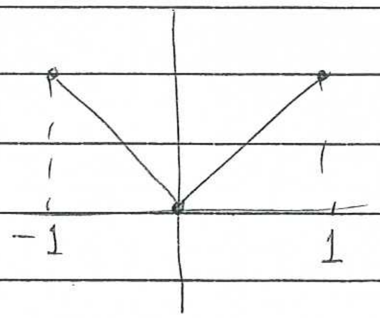
$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$ ∎

Προσοχή στις υποθέσεις: (για Rolle)

(1) $f$ όχι συνεχής στο $[a,b]$, παραγ. στο $(a,b)$.



(2) $f$ συνεχής στο $[a,b]$, όχι παραγ. στο $(a,b)$.



$|x|: \ x \in [-1,1]$

ΘΕΩΡ Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.

(i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \uparrow$

(ii) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \uparrow$

(iii) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \downarrow$

(iv) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \downarrow$

(v) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ σταθερή.

Απόδ. Έστω $x < y$.

Θεωρούμε τον περιορισμό $f|_{[x,y]} \xRightarrow{\text{ΘΜΤ}} \exists\, \xi \in (x,y)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

(i) $f'(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$ και $f \uparrow$

(ii) $f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$ και $f \uparrow$ κλπ. ■

ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ:

$\boxed{\text{ΘΜΤ του Cauchy}}$ $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς & παραγωγίσιμες στο $(a,b) \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ :

$$(f(b)-f(a))\cdot g'(x_0) = (g(b)-g(a))\cdot f'(x_0)$$

Παρατ. ΘΜΤ Cauchy $\Rightarrow$ ΘΜΤ για $g(x)=x$

Απόδ. Rolle για

$$h(x) = (f(x)-f(a))\cdot(g(b)-g(a)) - (f(b)-f(a))\cdot(g(x)-g(a))$$

$\Rightarrow$ $h$ συνεχής στο $[a,b]$ & παραγ. στο $(a,b)$ με

$h(a) = 0 = h(b)$.

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ : $h'(x_0) = 0$

$$= f'(x_0)\cdot(g(b)-g(a)) - (f(b)-f(a))\cdot g'(x_0).$$ ∎

Πόρισμα: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ & παραγ. στο $(a,b)$. Υποθ. ότι

(i) $f', g'$ δεν έχουν κοινή ρίζα.

(ii) $g(b)-g(a) \neq 0$.

Τότε $\exists\, x_0 \in (a,b)$ :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Απόδ. ΘΜΤ Cauchy $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$ : $(f(b)-f(a))g'(x_0) = (g(b)-g(a))f'(x_0)$

$g(b)-g(a) \neq 0$

Αν $g'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow (g(b)-g(a))\cdot f'(x_0) \neq 0$, άτοπο

Άρα $g'(x_0) \neq 0$. $\Rightarrow$ γίνεται διαίρεση. ∎