ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

1. Να βρεθεί ακρότατο της $f(x)=\sum_{i=1}^{k}(x-a_i)^2$ $k\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$

Απαντ.

f παραγωγίσιμη/συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{k}2(x-a_i)\cdot(x-a_i)'=2\sum_{i=1}^{k}(x-a_i)=2[kx-\sum a_i]=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{\sum a_i}{k}=\rho.$$

		ρ	
f'	$-$	0	$+$
	$\downarrow$		$\uparrow$

f $\downarrow$ στο $(-\infty,\rho)$

$\uparrow$ $(\rho,+\infty)$

παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο ρ. ∎

2. Νδο $\forall a>0$:

(i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0$

(ii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a}=+\infty$

(iii) τελικά $\ln x < x^a < e^x$

$\Downarrow$

$\forall x>M$, για κάποιο $M\in\mathbb{R}$

Σταθεροποιώ $a>0$.

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} \overset{\circledast}{\underset{\text{dlH}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{ax^{a-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{ax^a} = 0.$

$\circledast$ $(x^a)' = \left(e^{a\ln x}\right)' = e^{a\ln x} \cdot a/x = (a/x)\cdot x^a =$
$= ax^{a-1}$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^a} \overset{\text{dlH}}{=} \lim \dfrac{e^x}{ax^{a-1}} \overset{\text{dlH}}{=} \lim \dfrac{e^x}{a(a-1)x^{a-2}} \overset{\text{dlH}}{=} \cdots =$

$\overset{\text{dlH}}{=} \lim \dfrac{e^x}{a(a-1)\cdots(a-[a])\, x^{\underbrace{a-[a]-1}_{<0}}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x \cdot x^{[a]+1-a}}{a(a-1)\cdots(a-[a])} = +\infty.$

(iii) Από (i) $\exists\, M_1>0 : x>M_1 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{x^a} < 1$
$\Rightarrow \ln x < x^a$

Από (ii) $\exists\, M_2>0 : x>M_2 \Rightarrow \dfrac{e^x}{x^a} > 1 \Rightarrow$
$x^a < e^x$.

Άρα $\exists\, M>0$: $x>M \Rightarrow$
$\llcorner = \max(M_1, M_2)$
$\ln x < x^a < e^x$.

(Το M εξαρτάται από το a).

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = ?$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\frac{x+a}{x}}$$

exp συνεχής

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+a}\cdot\left(\frac{x+a}{x}\right)'}{-1/x^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+a}\cdot\frac{x-(x+a)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-a}{x(x+a)}}{-\frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{x^2+ax}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{1+\frac{a}{x}}\right) = \exp a = e^a.$$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(a^{1/x}-1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^{1/x}-1}{1/x} \overset{*}{=}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a^{1/x}\cdot\ln a\cdot(-1/x^2)}{-1/x^2} = \ln a\cdot\lim_{x\to+\infty}a^{1/x} = \ln a\cdot 1 = \ln a.$$

$*$ $\left(a^{1/x}\right)' = \left(\left(e^{\ln a}\right)^{1/x}\right)' = \left(e^{\frac{\ln a}{x}}\right)' = e^{\frac{\ln a}{x}}\cdot\left(\frac{\ln a}{x}\right)' =$

$$= a^{1/x}\cdot\ln a\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ-3)

Εξετάστε αν $h(x)=\begin{cases}\sin x & x\notin\mathbb{Q}\\ x & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ παραγωγίσιμη στο 0.

Απάντ. (∃?) $h'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)}{x}$

Ισχυρ: ∃ $h'(0)=1$.

Έστω $\varepsilon>0$. $\dfrac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1 \Rightarrow \exists\, \delta>0 : \forall |x|<\delta$: $\left|\dfrac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$.

Έστω $|x|<\delta$. (i) Αν $x\in\mathbb{Q}\Rightarrow \left|\dfrac{h(x)}{x}-1\right|=|1-1|=0<\varepsilon$.

(ii) Αν $x\notin\mathbb{Q}\Rightarrow \left|\dfrac{h(x)}{x}-1\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$. ∎

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ-5) ΝΔο

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη $\forall x\in\mathbb{R}$

και να εξετάσετε αν f' συνεχής.

Απόδ. $x\neq 0 \Rightarrow f$ παραγ. και $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

(∃?) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}\underset{\text{απρ. }\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2x}\underset{\text{απρ. }\frac{0}{0}}{=}\lim\dfrac{-\sin x}{2}=0.$

f' συνεχής $\forall\, x\neq 0$.

(∃?) $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=0$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}\underset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{\sin x}{2}=0.$

Ασκ Γ-8

$f(x)=x^3+2x+1$. Νδο $\exists f^{-1}$, είναι παραγωγίσιμη $\forall x\in\mathbb{R}$
και να υπολογισθεί η $(f^{-1})'(-2)$,
$(f^{-1})'(1)$,
$(f^{-1})'(4)$.

Απόδ. $f'(x)=3x^2+2>0 \Rightarrow f\uparrow \Rightarrow f$ αντιστρέφεται

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow f$ επί. δηλ.

$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$f'(x)\neq 0\ \ \forall x \Rightarrow \exists\ (f^{-1})'(\underbrace{y}_{=f(x)})=\dfrac{1}{f'(x)}$.

Για $y=-2=x^3+2x+1 \Rightarrow x^3+2x+3=0 \Rightarrow x=-1$.

$(f^{-1})'(-2)=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{3\cdot 1+2}=\dfrac{1}{5}$.

Για $y=1=x^3+2x+1 \Rightarrow x^3+2x=0 \Rightarrow x(x^2+2)=0 \Rightarrow x=0$.

$(f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$.

Για $y=4=x^3+2x+1 \Rightarrow x^3+2x+1=4 \Rightarrow x^3+2x-3=0 \Rightarrow x=1$.

$(f^{-1})'(4)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5}$. ∎

Παρατ: $(f^{-1})'(f(a))=\dfrac{1}{f'(a)}=\dfrac{1}{3a^2+2}$.

Να υπολογισθεί η $(f^{-1})'$ στα $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$

10 $\frac{\ln x}{x} < 1/e \quad \forall x \in (0,+\infty), \quad x \neq e.$

$\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e} \iff \ln x < \frac{x}{e} \iff f(x) = \frac{x}{e} - \ln x > 0.$

f παραγ./συνεχής στο $(0,+\infty)$.

$f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = 0 \iff x = e$

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0.$

$\Rightarrow$ min στο e $\Rightarrow$

$f(x) \geq f(e) \quad \forall x > 0 \Rightarrow$

$\frac{x}{e} - \ln x \geq \frac{e}{e} - \ln e = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$

$\frac{x}{e} \geq \ln x \Rightarrow \frac{1}{e} \geq \frac{\ln x}{x}.$

11 $x^e < e^x \quad \forall x > 0 \quad x \neq e.$ (εφαρμ: $\pi^e < e^\pi$).

Αποδ.

Από την προηγ. Άσκ:

$\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e} \Rightarrow e \ln x < x \xrightarrow{\exp \uparrow} e^{e \ln x} < e^x$

$\Rightarrow x^e < e^x.$

("=" για $x = e$.)

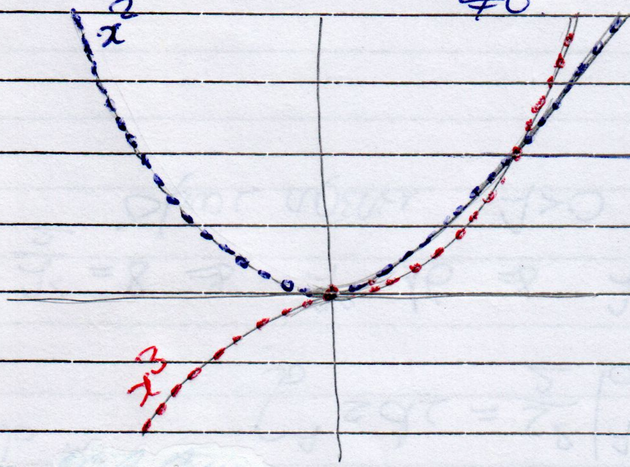
<u>Ασκ</u> $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\in\mathbb{Q} \\ x^2 & x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$, $x\in\mathbb{R}$. Εξετάστε:

(i) αν f 1-1.

(ii) σε ποια σημεία f συνεχής.

(iii) πού είναι παραγωγίσιμη; $f'=?$

<u>Απαντ.</u> (i) όχι 1-1: $\underset{\neq 0}{\rho\notin\mathbb{Q}} \Rightarrow f(\rho)=f(-\rho)$.



(ii) $x_0\in\mathbb{R}$: f συνεχής στο x_0. $\exists\,(q_n)$ $q_n\in\mathbb{Q}$: $q_n\to x_0$

$\exists\,(a_n)$: $a_n\notin\mathbb{Q}$, $a_n\to x_0$.

$$\left.\begin{aligned} f(q_n)&=q_n^3 \longrightarrow x_0^3 \\ f(a_n)&=a_n^2 \longrightarrow x_0^2 \end{aligned}\right\} \text{ πρέπει } x_0^3=x_0^2 \Rightarrow x_0^2(x_0-1)=0$$

$$\Rightarrow x_0=0 \text{ ή } 1.$$

⊛ πράγματι, συνεχής στα 0, 1. <u>Απόδ:</u> ;; ($\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\ldots$)

(iii) παραγ. ⇒ συνεχής. Εξετάζω στα 0, 1:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}\lim x=0\\ \lim x^2=0.\end{cases}$$

$\exists ?\ f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = ?$

$\mathbb{Q} \ni q_n \to 1 \Rightarrow \lim_n \frac{f(q_n)-1}{q_n-1} = \lim_n \frac{q_n^3-1}{q_n-1} =$

$= \lim_n q_n^2+q_n+1 \to 3.$

$\mathbb{Q} \not\ni a_n \to 1 \Rightarrow \lim_n \frac{f(a_n)-1}{a_n-1} = \lim \frac{a_n^2-1}{a_n-1} = \lim a_n+1 = 2.$

$\Rightarrow \nexists\ f'(1).$ ■

$\boxed{\text{ΑΣΚ}}$ (i) $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς: $f(x) > g(x)\ \forall x$.
Νδο $\exists\ c>0$: $f(x) > g(x)+c \quad \forall x \in [a,b]$.
(ii) ισχύει το ίδιο αν π.ο. είναι το (a,b)?

Απαντ. (i) $f-g$ συνεχής στο $a,b \Rightarrow$ έχει min. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\ x_0 \in [a,b]$: $\underbrace{f(x_0)-g(x_0)}_{0<d} \leq f(x)-g(x) \quad \forall x$

Θέτω $c := d/2 \Rightarrow f(x)-g(x) \geq d > d/2 = c \quad \forall x \in [a,b]$
$\Rightarrow f(x) > c + g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

(ii) Όχι, π.χ.: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ στο $(0,1) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)-g(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x) > 0$, $\forall x \in (0,1)$.
Όμως
$f(x)-g(x) > c \quad \forall x \in (0,1) \Rightarrow f(1/n) - g(1/n) > c \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{1}{c} > n^2 > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, άτοπο.

Ασκ (Γ-13)

Βρείτε max, min της $f(x)=x^3-x^2-8x+1$ στο $[-2,2]$

Απάντ f παραγ., $f'(x)=3x^2-2x-8=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{3} = \begin{cases} 2 \\ -4/3 \end{cases}$

$f(-2)=-8-4+16+1=-12+17=5.$

$f(-4/3)=203/27$

$f(2)=8-4-16+1=9-20=-11.$

$\max(f)=203/27$ και $\min(f)=-11$

στο $-4/3$ στο 2.

Ασκ (Γ-16)

$a_1<a_2<\dots<a_n$ στο $\mathbb{R}$, $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$.

Νδο $f'(x)=0$ έχει ακριβώς $n-1$ λύσεις.

Αποδ. Εφαρμόζοντας Rolle στα $[a_i,a_{i+1}] \Rightarrow$

$\exists$ ρίζα της παραγώγου σε καθένα $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ τουλάχιστον $n-1$ ρίζες.

Έστω ότι f' έχει n ρίζες. $\Rightarrow f''$ έχει $n-1$ ρίζες $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'''$ έχει $n-2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(n)}$ έχει $n-(n-1)=1$ ρίζα

$\llcorner f^{(n)}(x)=n!$, άτοπο. ■

Ασκ (Γ-24)

$f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγ: $f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$.

Νδο ανάμεσα σε δύο ρίζες της f $\exists$ ρίζα της g.

Αποδ. Έστω $x_1<x_2$ στο (a,b) με $f(x_1)=f(x_2)=0$

και έστω ότι $g(x)\neq 0$ $\forall x\in(x_1,x_2)$.

$f'(x_1)g(x_1) - \underbrace{f(x_1)g'(x_1)}_{=0} \neq 0 \Rightarrow g(x_1) \neq 0.$

$f'(x_2)g(x_2) - f(x_2)g'(x_2) \neq 0 \Rightarrow g(x_2) \neq 0.$

$\Rightarrow g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2] . \Rightarrow \exists\, f/g : [x_1, x_2]$ συν. παραγ. στο (x_1, x_2)

και $\dfrac{f(x_1)}{g(x_1)} = 0 = \dfrac{f(x_2)}{g(x_2)} \xrightarrow{\text{Rolle}}$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in [x_1, x_2] : \left(\dfrac{f}{g}\right)'(\xi) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g(\xi)^2} = 0,$ άτοπο. ∎

Ασκ Γ-25

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$, παραγ/μη στο (a,b), $f(a)=f(b)$. Νδο $\exists\ x_1\neq x_2\in(a,b):\ f'(x_1)+f'(x_2)=0$

Απόδ

$\gamma:=\frac{a+b}{2}\in(a,b)$. ΘΜΤ για $[a,\gamma],[\gamma,b]\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\exists\ x_1\in(a,\gamma):\quad f'(x_1)=\frac{f(\gamma)-f(a)}{\gamma-a}\\ \exists\ x_2\in(\gamma,b):\quad f'(x_2)=\frac{f(b)-f(\gamma)}{b-\gamma}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_1)+f'(x_2)=\frac{f(\gamma)-f(a)}{\gamma-a}+\frac{f(b)-f(\gamma)}{b-\gamma}=0.$$

Ασκ. Γ-27

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγ/μη : $|f'(x)|\leq 1/x\quad\forall x>1$.

Νδο $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+\sqrt{x})-f(x)]=0$.

Απόδ. Απο ΘΜΤ στο $[x,\ x+\sqrt{x}]$ $\exists\ y_x\in(x,x+\sqrt{x})$: $\boxed{x<y_x}<x+\sqrt{x}$

$$f'(y_x)=\frac{f(x+\sqrt{x})-f(x)}{\sqrt{x}}\Rightarrow$$

$$|f(x+\sqrt{x})-f(x)|=\sqrt{x}\cdot f'(y_x)\leq\sqrt{x}\cdot\frac{1}{y_x}<\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\to 0.\quad\blacksquare$$

$\boxed{\text{ΓΕΝΙΚΟ ΣΧΟΛΙΟ}}$ $[e^x f(x)]'=e^x f(x)+e^x f'(x)=$

$=e^x[f(x)+f'(x)].\ \Rightarrow\ ??$

Ασκ 36

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγ στο (a,b). $f(a)=f(b)=0$.
Νδο $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ η $g_\lambda(x) = f'(x) + \lambda f(x)$ έχει μία ρίζα στο (a,b).

Αποδ.
Θεωρώ την $h_\lambda: [a,b] \to \mathbb{R}$: $h_\lambda(x) = e^{\lambda x} f(x) \Rightarrow$
h_λ συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και
$h_\lambda(a) = e^{\lambda a} \cdot \underbrace{f(a)}_{=0} = 0 = h_\lambda(b) = e^{\lambda b} \cdot \underbrace{f(b)}_{=0}$.

Από Rolle για h_λ $\exists\, \xi \in (a,b)$: $h_\lambda'(\xi) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (e^{\lambda\xi} \cdot \lambda) f(\xi) + e^{\lambda\xi} f'(\xi) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

Ασκ 37-Γ

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγ/μη, $\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. Νδο
$\exists\, \xi \in (a,b)$: $f'(\xi) > f(\xi)$.

Αποδ. $g(x) = e^{-x} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to b^-} g(x) = +\infty$.

Σταθεροποιώ $c \in (a,b) \Rightarrow \exists\, d \in (c,b)$: $g(d) > g(c)$
ΘΜΤ στο $[c,d]$: $\exists\, \xi \in (c,d)$:

$$g'(\xi) = \frac{g(d) - g(c)}{d - c} > 0$$

$$= -e^{-\xi} f(\xi) + e^{-\xi} f'(\xi) > 0 \Rightarrow$$

$$e^{-\xi} (f'(\xi) - f(\xi)) > 0 \Rightarrow$$

$$f'(\xi) > f(\xi)$$

Παράδ. Να βρεθούν max, min της

$f: [1/2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}: \quad f(x) = 2x^3 - 3x^2$

Απαντ. f παραγωγ. με $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

Τα ακρότατα παρουσιάζονται στα άκρα και στα σημεία με $f'(x)=0 \Rightarrow \underset{\text{εκτός } \Pi.O}{\underline{x=0}}$ ή $x=1$

πιθανά ακρότατα στα $1/2, 1, 2$.

$f(1/2) = \frac{2}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

$f(1) = 2-3 = -1$

$f(2) = 16-12 = 4$.

$\max(f) = 4$ στο 2.

$\min(f) = -1$ στο 1.

7. Ν.δ.ο. η εξίσωση

(*) $4ax^3+3\beta x^2+2\gamma x = a+b+\gamma$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$

Αποδ.

(*) $\Leftrightarrow 4ax^3+3\beta x^2+2\gamma x-(a+b+\gamma)=0$

$$\Leftrightarrow \Big(\underbrace{ax^4+\beta x^3+\gamma x^2-(a+b+\gamma)x}_{f(x)}\Big)'=0.$$

Παρατηρώ ότι f συνεχής στο $[0,1]$, παραγ. στο $(0,1)$

$f(0)=0=f(1) \xRightarrow[\text{Rolle}]{} \exists\ \xi\in(0,1):\ f'(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi$ ρίζα της (*)

$\boxed{Ασκ}$ (1/9/10)

ναι (i) $f: [0,1] \to [0,3]$ συνεχής & επί. Ν.δ.ο $\exists\ \xi \in [0,1]$:
$f(\xi) = 2\xi^2 - \xi + 1$.

όχι (ii) Ν.δ.ο η εξίσωση $3e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Αποδ (i) Θεωρώ το $p(x) = 2x^2 - x + 1$
Έχει min στο $p'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/4$.
$p(1/4) = 7/8$.
$p(0) = 1$, $p(1) = 2$. Άρα
$7/8 \le p(x) \le 2 \Rightarrow -2 \le -p(x) \le -7/8$.

Θεωρώ τώρα την $g(x) = f(x) - p(x)$ συνεχής στο $[0,1]$
f επί του $[0,3]$
$\exists\ x_1 \in [0,1]$: $f(x_1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x_1) = 0 - p(x_1) \le -7/8 \Rightarrow g(x_1) < 0$.

$\exists\ x_2 \in [0,1]$: $f(x_2) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x_2) = 3 - p(x_2) \ge 3 - 2 = 1 > 0$.

Άρα $\exists\ \xi \in [x_1, x_2]$ (ή $[x_2, x_1]$): $g(\xi) = 0$ ✓.

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (22/01/10)

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin 1/x^2 & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

(i) Νδο f παραγωγίσιμη & να βρεθεί η f'.

(ii) Νδο $\forall \varepsilon>0$ f' όχι φραγμ. στο $(-\varepsilon,\varepsilon)$.

(iii) f' συνεχής στο $\mathbb{R}$;

Αποδ. (i) $x\neq 0 \Rightarrow f'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}+x^2\cos\frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right)$

$$=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}.$$

$(\exists ?)$ $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\underset{\substack{\downarrow\\0}}{x}\cdot\underbrace{\sin\frac{1}{x^2}}_{\text{φραγμ.}}=0.$

(ii) Έστω $\varepsilon>0$. και f φραγμ. από $M>0$.

$x_n=1/\sqrt{2n\pi}\to 0$ και

$$f'(x_n)=\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\cdot\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0.}-2\sqrt{2n\pi}\cdot\underbrace{\cos(2n\pi)}_{1.}$$

$$=-2\sqrt{2n\pi}\quad \text{όχι φραγμ.}$$

Επειδή $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $x_n\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ ·

$|f(x_n)|$ ξεπερνά οποιοδήποτε $M>0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ όχι φραγμένη.

(iii) Αν f' συνεχής στο 0 $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=0$

$\Rightarrow \forall \underset{x_n\neq 0}{(x_n)\to 0}:\ \exists \lim\limits_{n} f'(x_n)=0.$

$\Rightarrow f'(x_n)$ φραγμ., αντίκειται στο προηγούμενο. ∎

Ασκ 39

(α) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exists f''$, $f(0)=f'(0)=0$, $f(x)+f''(x)=0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Αποδ $g=f^2+(f')^2 \Rightarrow g'=2ff'+2f'f''=2f'(f+f'')=0$

$\Rightarrow$ g σταθερή $\Rightarrow$

$\Rightarrow (f(x))^2+(f'(x))^2 = f(0)^2+(f'(0))^2=0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=f'(x)=0, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(β) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\exists f''$, $f(0)=1$, $f'(0)=0$,

$f''(x)+f(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=\cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Απόδειξη: $g(x)=f(x)-\cos x$ ικανοποιεί (α) $\Rightarrow g(x)\equiv 0$.

Ασκ Γ-45

$f: [0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $f(0)=0$, παραγ. στο $(0,1)$, $0\le f'(x)\le 2f(x)$

$\forall x\in(0,1)$.

$\Rightarrow f=0$

Αποδ. $g(x):=e^{-2x}f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)=e^{-2x}(f'(x)-2f(x))\le 0$

$\Rightarrow g\downarrow$ στο $(0,1)$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=e^0 f(0)=0 \Rightarrow g(x)\le 0 \quad \forall x\in(0,1)$

$g(x)=e^{-2x}f(x)\ge 0 \quad \forall x\in(0,1)$

$[f(0)=0,\ f'(x)\ge 0 \Rightarrow f\uparrow$ και $f(x)\ge 0]$

$\Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow f(x)=0$.

$\boxed{\text{Ασκ } 46}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγ/μη, $f'(x) > f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0)=0$. Νδο $f(x) > 0$ $\forall x > 0$

Απόδ. $g(x) := e^{-x} f(x) \Rightarrow$

$g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$g \uparrow \Rightarrow$

$\forall x > 0: \; g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow \underline{f(x) > 0 \quad \forall x > 0}$

Παρατ. $\forall x < 0: \; g(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$.

$\boxed{\text{ΑΣΚ Γ-47}}$

Εστω $a > 0$ Νδο η εξίσ. $ae^{x} = 1 + x + x^2/2$ εχει ακριβώς μία πραγμ. ρίζα

Αποδ. $g(x) := e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x) = -e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + e^{-x}(1+x) =$

$= e^{-x} \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow g \downarrow$ στο $(-\infty, 0)$ και $g \downarrow (0, +\infty)$ και συνεχής $\Big\} \Rightarrow g \downarrow$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2}}{e^x} \overset{\text{dlH}}{=} \lim\limits_{+\infty} \frac{1+x}{e^x} \overset{\text{dlH}}{=}$

$= \lim \frac{1}{e^x} = 0.$

$\Rightarrow g(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

$\Rightarrow \forall a \in (0, +\infty) \; \exists! \; \xi \in \mathbb{R}: g(\xi) = a \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-\xi}\left(1 + \xi + \xi^2/2\right) = a \Rightarrow ae^{\xi} = 1 + \xi + \xi^2/2$.

Να μελετηθεί η $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,

① π.ο. $\mathbb{R}$, $\nexists$ ρίζες, $f(0)=1$, $f(x)>0$, άρτια

② f παραγωγίσιμη με

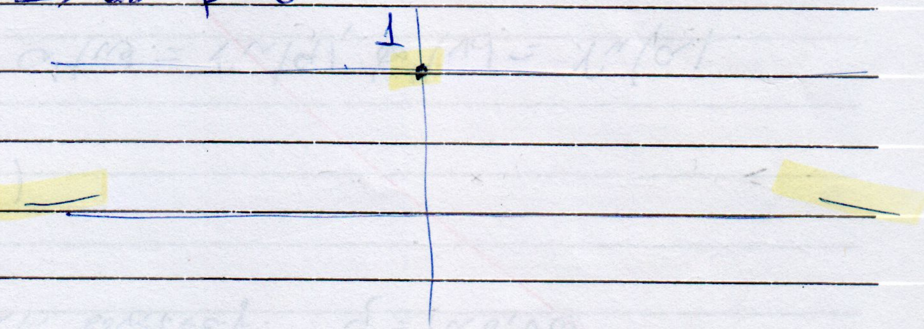
$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$+ \quad 0 \quad -$

$\Rightarrow f \uparrow$ στο $(-\infty,0)$, $\downarrow$ στο $(0,+\infty)$

$\Rightarrow$ παίρνει μέγιστη τιμή στο 0: $f(0)=1$

④ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \alpha=\beta=0$



③ $$f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$-\left[\frac{2(1+x^2)^2 - 2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}\right] =$$

$$= -\frac{2(1+x^2) - 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{2[4x^2-1-x^2]}{(1+x^2)^3} =$$

$$= \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

πρόσημο:

$f''(x) > 0$ στα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

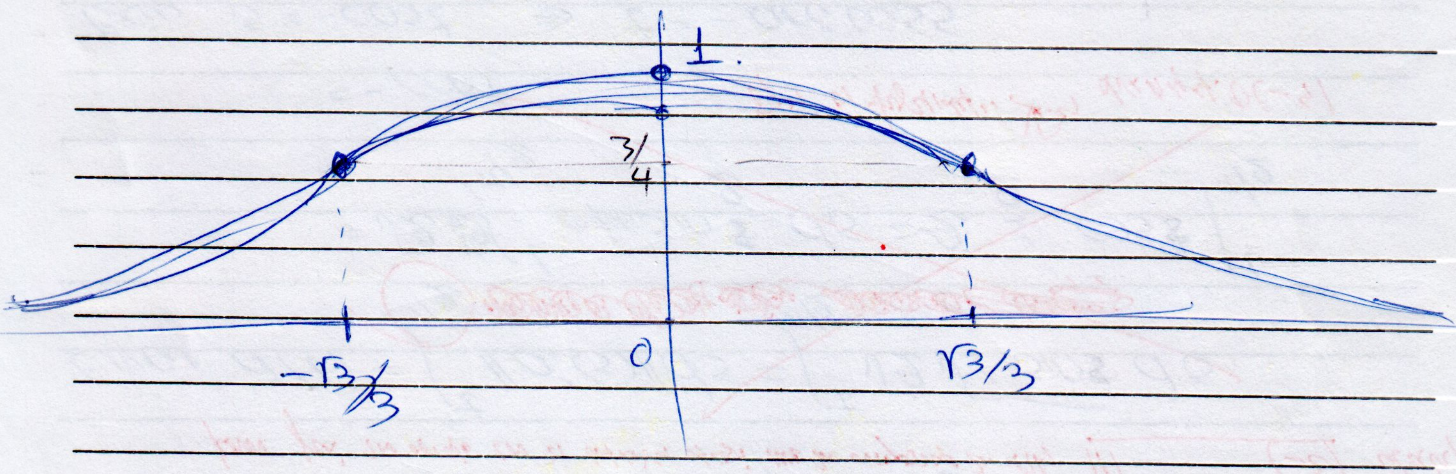
$f''(x) < 0$ στο $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Άρα f έχει σ. καμπής στα $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ κυρτή

$\left(-\sqrt{3}/3, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ κοίλη

$\left(\sqrt{3}/3, +\infty\right)$ κυρτή.



$f(\sqrt{3}/3) = \dfrac{1}{1/3+1} = \dfrac{1}{4/3} = 3/4$.

		$-\sqrt{3}/3$		0		$\sqrt{3}/3$	
f'	+		+		−		−
f''	+		−		−		+
f	↗ κυρτή	σ.κ 3/4	↗ κοίλη	max 1	↘ κοίλη	σ.κ 3/4	↘ κυρτή

Να μελετηθεί η $f(x)=e^{-1/x^2}$

① $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\quad f(x)>0 \quad \forall\, x\in A$, $\nexists f(0)$

f άρτια.

② συνεχής/παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in A$ σαν σύνθεση παραγ.

$f'(x)=(e^{-1/x^2})'=e^{-1/x^2}\cdot(-1/x^2)'=e^{-1/x^2}\cdot(-x^{-2})'=$

$=e^{-1/x^2}(-(-2)x^{-3})=2e^{-1/x^2}\cdot x^{-3}$

$=\dfrac{2e^{-1/x^2}}{x^3}\neq 0$.

$f'(x)>0 \iff x>0$, και $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0. \xrightarrow[\text{δες}]{} (3α)$

③ $f''(x)=2\left[e^{-1/x^2}\cdot x^{-3}\right]'=$

$=2\left[(e^{-1/x^2})'\cdot x^{-3}+e^{-1/x^2}\cdot(x^{-3})'\right]=$

$=2\left[2e^{-1/x^2}\cdot x^{-3}\cdot x^{-3}+e^{-1/x^2}(-3)x^{-4}\right]=$

$=2\left[2e^{-1/x^2}\cdot\dfrac{1}{x^6}-3e^{-1/x^2}\cdot\dfrac{1}{x^4}\right]=$

$=2e^{-1/x^2}\left[\dfrac{2}{x^6}-\dfrac{3}{x^4}\right]=2e^{-1/x^2}\,\dfrac{2-3x^2}{x^6}$

$f''(x)=0 \iff -3x^2+2=0 \iff$

$\iff x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

④ f συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ άρα $\nexists$ κατακ. ασ. σε κανένα $x\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{y\to-\infty} e^{y}=0 \Rightarrow \nexists$ κατακ. ασ. στο $0=x_0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{0}{\pm\infty}=0=a$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{\pm\infty} f(x)=1=\beta$.

$\Rightarrow$ $\exists$ οριζόντια ασύμπτωτη $y=\beta=1$ στο $\pm\infty$

3α

$$\lim_{0} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3} = \frac{0}{0} \overset{dlH}{=} \lim \frac{2e^{-1/x^2}\cdot(-1/x^2)'}{3x^2} =$$

$$= \lim_{0} \frac{2e^{-1/x^2}\cdot 2x^{-3}}{3x^2} = \lim_{0} e^{-1/x^2}\cdot\frac{4}{3}\frac{1}{x^5}$$

?

$$\lim_{0} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3} = \lim 2e^{-1/x^2}x^{-3} = \lim 2e^{-1/x^2}\left(e^{\ln x}\right)^{-3} =$$

$$= 2\lim_{0} e^{-1/x^2}\cdot e^{-3\ln x} = 2\lim_{0} e^{-\left[\frac{1}{x^2}+3\ln x\right]} = 0.$$

και

$$\frac{1}{x^2}+3\ln x = \frac{1}{x^2}\left[1+x^2\ln x\right] = \frac{1+x^2\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{0} \frac{1+x^2\ln x}{x^2} = \frac{1}{0^+} +\infty.$$

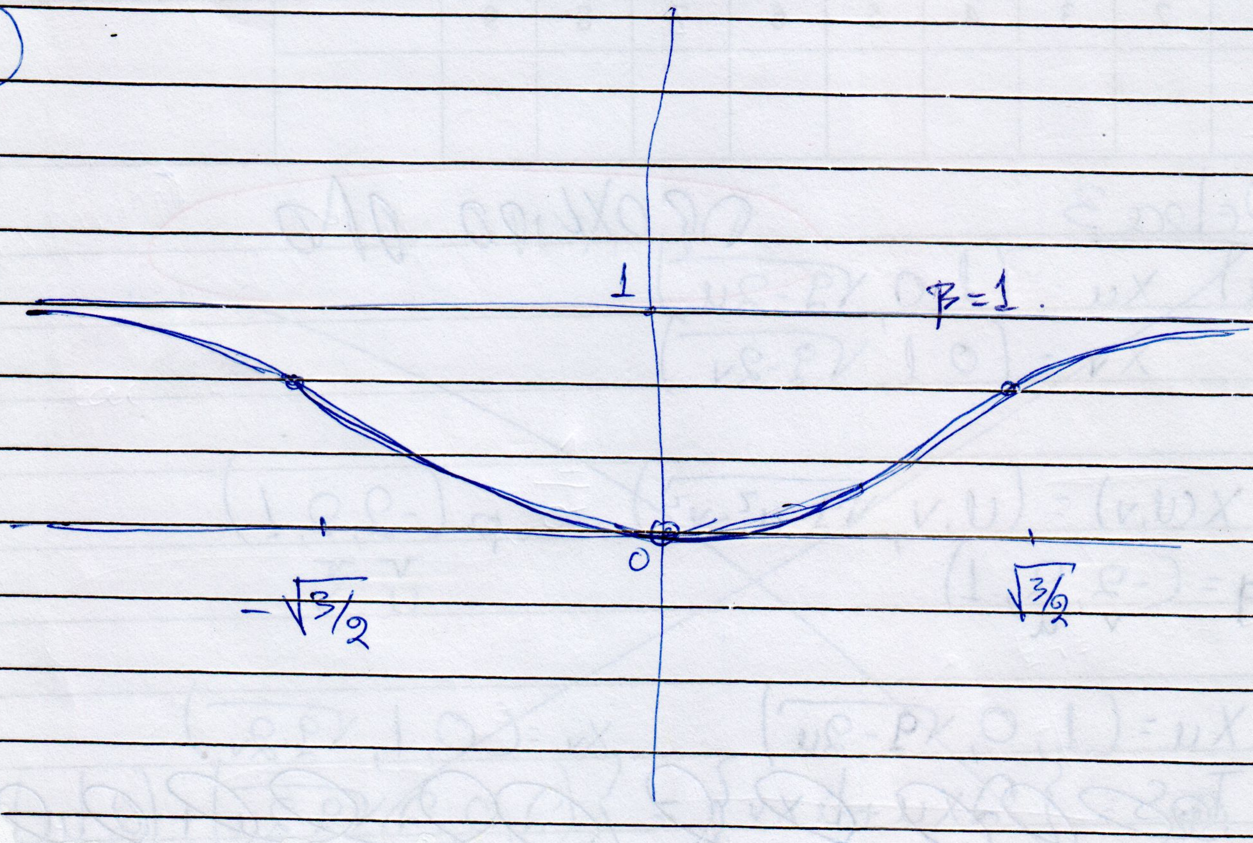
$$\lim_{0} x^2\ln x = \lim_{0} \frac{\ln x}{1/x^2} \overset{dlH}{=} \lim_{0} \frac{1/x}{-2x^{-3}} = \lim \frac{1/x}{-2/x^3} =$$

$$= \lim_{0}\left[-\frac{x^2}{2}\right] = 0.$$

5

		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{2/3}$	
f'	−		−	*	+		+
f''	−	0	+	*	+	0	−
f	↘		↘	*	↗		↗
	1	σ.κ.		0 ¦ 0		σ.κ.	1

6



7 Παρατ: f μπορεί να επεκταθεί σε συνεχή με π.ο. όλο το $\mathbb{R}$, θέτοντας $f(0)=0$.