

# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι



**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ, ΑΘΗΝΑ 15784  
ΤΗΛ 210 - 7276397, FAX 210 - 7276398

Τετάρτη, 30 Σεπτεμβρίου 2015

# Περίγραμμα

- 1 Πληροφορίες για το μάθημα - κατανομή φοιτητών
- 2 Ηλεκτρονική τάξη
- 3 Περιγραφή του Μαθήματος
  - Πραγματικοί αριθμοί
  - Ακολουθίες πραγματικών αριθμών
  - Συναρτήσεις
  - Όρια και Συνέχεια Συνάρτησης
  - Παράγωγος συνάρτησης
- 4 Βιβλιογραφία

Έτος διδασκαλίας: 2015-2016, Χειμερινό Εξάμηνο  
Ημέρες: Δευτ. - Τετ. - Παρ., Ώρα: 13:00-15:00


### Διδάσκοντες

- **Τμήμα 1<sup>ο</sup>** (ΑΜ που λήγει σε 1,2,3) Αμφ 24,  
Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Γραφείο: 217, τηλ. 210-7276380,  
[http://noether.math.uoa.gr/Academia/didaktiki/tzaharia\\_gr](http://noether.math.uoa.gr/Academia/didaktiki/tzaharia_gr)
- **Τμήμα 2<sup>ο</sup>** (ΑΜ που λήγει σε 4,5,6,7) Αμφ 22,  
Ευαγγελάτου-Δάλλα Λεώνη  
Γραφείο: 207, τηλ. 210-7276375,  
[http://noether.math.uoa.gr/Academia/analysis/ldalla\\_gr](http://noether.math.uoa.gr/Academia/analysis/ldalla_gr)
- **Τμήμα 3<sup>ο</sup>** (ΑΜ που λήγει σε 8,9,0) Αμφ 23,  
Παπατριανταφύλλου Μαρία  
Γραφείο: 203, τηλ. 210-7276349,  
<http://noether.math.uoa.gr/Academia/analysis/papatriantafylloy-maria>

# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

## Ιστοσελίδα του Μαθήματος

<http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/>



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Επιλογές Μαθήματος

- Εγγραφή
- Ανακοινώσεις
- Αξιολόγηση
- Γλωσσάριο
- Ηλεκτρονικό Βιβλίο
- Ημερολόγιο
- Ιστολόγιο
- Πληροφορίες
- Παθήματα
- Σύνδεσμοι

Αρχική Σελίδα / Απειροστικός Λογισμός I

### Απειροστικός Λογισμός I

A. Γιαννόπουλος, A. Κατάβολος

**Περιγραφή**

Αυτή είναι η ηλεκτρονική σελίδα του μαθήματος Απειροστικός Λογισμός I που δίδεται στο Τμήμα Μαθηματικού του Πανεπιστημίου Αθηνών. Κατά το χειμερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2015-16 διδάσκοντες του μαθήματος είναι οι Α.Ευαγγελίδου-Δάλλα, Θ.Ζαχαριάδης, Μ.Παπαριμανταράλλου. Μέσω αυτής της σελίδας οι φοιτητές μπορούν να ενημερώνονται για το μάθημα και να έχουν πρόσβαση σε εκπαιδευτικό υλικό (σημειώσεις και ασκήσεις). Η σελίδα θα ανανεώνεται τακτικά στη διάρκεια του εξαμήνου.

**Κωδικός: MATH130**  
Σχολή - Τμήμα: Μαθηματικών - Προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών  
Πρόσβαση στο μάθημα: Ελεύθερη (χωρίς εγγραφή)  
Χρήστες: 1224 εγγεγραμμένοι, Βιβλιογραφική αναφορά μαθήματος

#### Ημερολόγιο

Σεπτέμβριος 2015						
Κυριακή	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο
30	31	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	-	-	-

■ Προβλεπόμενα  
■ Γενικές μαθήματα  
■ Γενικός εκκαθάρισμός  
■ Προσωπικά γεγονότα

#### Ανακοινώσεις

**ΘΕΜΑΤΑ Σεπτεμβρίου**  
Δευτέρα, 31 Αυγούστου 2015

**Επανεξέταση γραπτού/να κοπεί ο βαθμός**  
Τρίτη, 14 Ιουλίου 2015

**Αποτελέσματα Ιουνίου 2015**  
Τρίτη, 14 Ιουλίου 2015

**Θέματα εξέτασης 26/6/2015**  
Παρασκευή, 26 Ιουνίου 2015

**Κατανομή αιθουσών**  
Πέμπτη, 25 Ιουλίου 2015

περισσότερα...

Open eClass © 2003-2015 -- Όρος Κρήτης

# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

## Περιγραφή του Μαθήματος

- 1 Πραγματικοί αριθμοί
- 2 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών
- 3 Συναρτήσεις
- 4 Όριο και Συνέχεια Συναρτήσεων
- 5 Παράγωγος

## 1. Πραγματικοί αριθμοί:

- Αξιοματική θεμελίωση των Πραγματικών αριθμών
- Φυσικοί, Ακέραιοι και Ρητοί αριθμοί
- Αξίωμα πληρότητας
- Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας
- Άρρητοι αριθμοί
- Ακέραιο μέρος
- Πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων στους πραγματικούς αριθμούς
- Κλασσικές ανισότητες



# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

## Άρρητοι αριθμοί

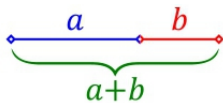
Το σοκ του Πυθαγόρα - Υποτεινούσα ορθογώνιων τριγώνων





Χρυσή τομή:  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\dots$

- Γεωμετρικά προκύπτει μέσω της αναλογίας:  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \equiv \phi$

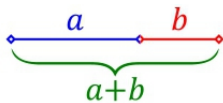


- Αλγεβρικά προκύπτει ως θετική ρίζα της εξίσωσης:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Χρυσή τομή:  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\dots$

- Γεωμετρικά προκύπτει μέσω της αναλογίας:  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \equiv \phi$



- Αλγεβρικά προκύπτει ως θετική ρίζα της εξίσωσης:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Τι εκφράζει πραγματικά αυτός ο αριθμός;

# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

## Άρρητοι αριθμοί

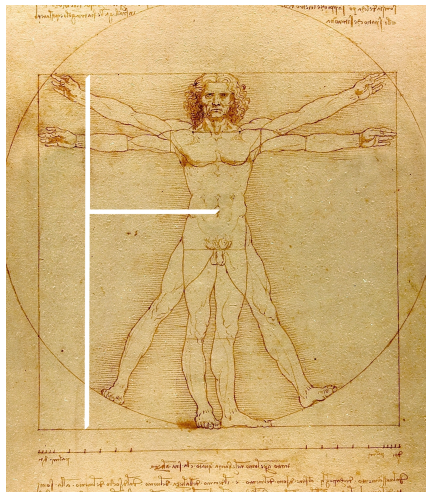
Αρμονία στην αρχιτεκτονική του Παρθενώνα, 438 π.Χ.



# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

## Άρρητοι αριθμοί

Αρμονία στο έργο του Da Vinci - Vitruvian Man, 1487 μ.Χ.



Υπερβατικοί αριθμοί: Ρητή προσέγγιση του  $\pi$  με 999 δεκαδικά ψηφία

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781  
64062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505  
82231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381  
96442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346  
03486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209  
20962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941  
51160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237  
99627495673518857527248912279381830119491298336733624406566430860  
21394946395224737190702179860943702770539217176293176752384674818  
46766940513200056812714526356082778577134275778960917363717872146  
84409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219  
60864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951059  
73173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118  
81710100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287  
55468731159562863882353787593751957781857780532171226806613001927  
876611195909216420199

## 2. Ακολουθίες πραγματικών αριθμών:

- Συγκλίνουσες ακολουθίες
- Μονότονες ακολουθίες
- Κιβωτισμός διαστημάτων
- Αναδρομικές ακολουθίες

Τι είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;

Τι είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;  
Είναι μια απεικόνιση από το σύνολο  $\mathbb{N}$  στο  $\mathbb{R}$ .



Τι είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;  
Είναι μια απεικόνιση από το σύνολο  $\mathbb{N}$  στο  $\mathbb{R}$ .

- Μέσω τύπου:

1  $\alpha_n = \sqrt[n]{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2  $\alpha_n = (1 + 1/n)^n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e = 2,71828\dots$

- Μέσω αναδρομικής σχέσης:

1  $\alpha_{n+1} = \sqrt{1 + \alpha_n}$ ,  $n \geq 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \phi$ .

2 Ακολουθία Fibonacci:  $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \phi$ .

- Ακολουθία των πρώτων αριθμών:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, ...

Τι είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;  
Είναι μια απεικόνιση από το σύνολο  $\mathbb{N}$  στο  $\mathbb{R}$ .

- Μέσω τύπου:

1  $\alpha_n = \sqrt[n]{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2  $\alpha_n = (1 + 1/n)^n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e = 2,71828\dots$

- Μέσω αναδρομικής σχέσης:

1  $\alpha_{n+1} = \sqrt{1 + \alpha_n}$ ,  $n \geq 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \phi$ .

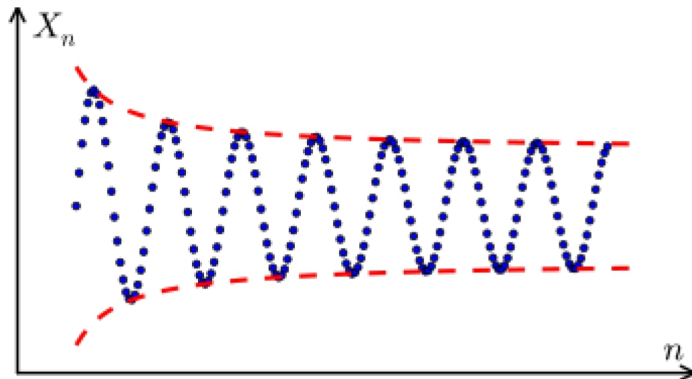
2 Ακολουθία Fibonacci:  $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \phi$ .

- Ακολουθία των πρώτων αριθμών:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, ...

Υπάρχει συνάρτηση ή αναδρομικός τύπος που να δίνει την παραπάνω ακολουθία;

Φραγμένη μη συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών  
άπειρων όρων



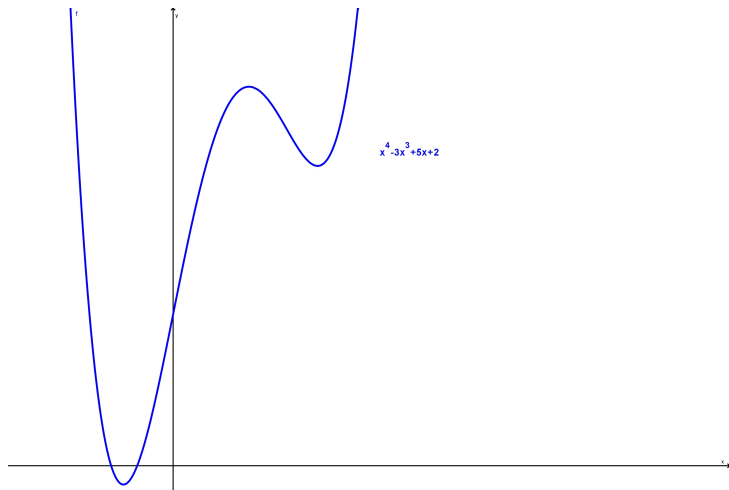
## 3. Συναρτήσεις:

- Βασικοί ορισμοί
- Αλγεβρικές συναρτήσεις
- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Εκθετική συνάρτηση

# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

## Πραγματικές συναρτήσεις

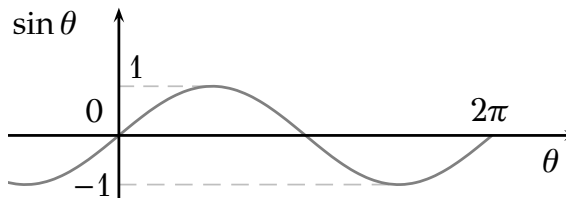
Γράφημα πολυωνυμικής συνάρτησης 4<sup>ου</sup> βαθμού



# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

## Πραγματικές συναρτήσεις

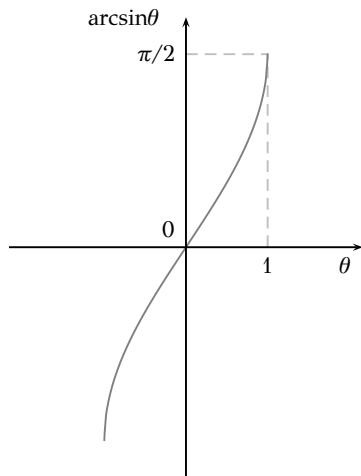
Γράφημα τριγωνομετρικής συνάρτησης ημιτόνου



# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

## Πραγματικές συναρτήσεις

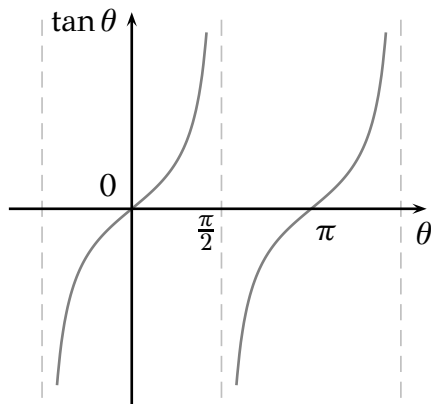
Γράφημα αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης ημιτόνου



# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

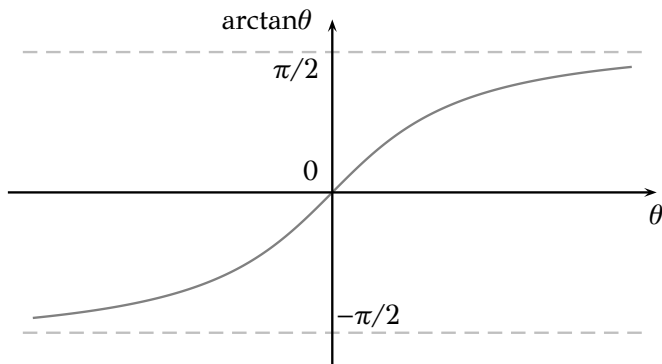
## Πραγματικές συναρτήσεις

Γράφημα τριγωνομετρικής συνάρτησης εφαπτομένης





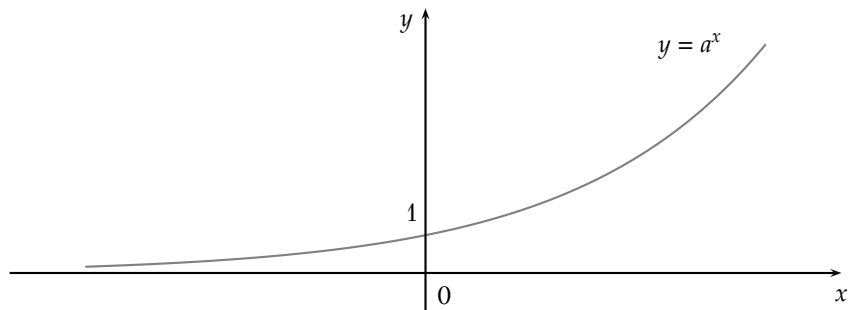
Γράφημα αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης εφαπτομένης



# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

## Πραγματικές συναρτήσεις

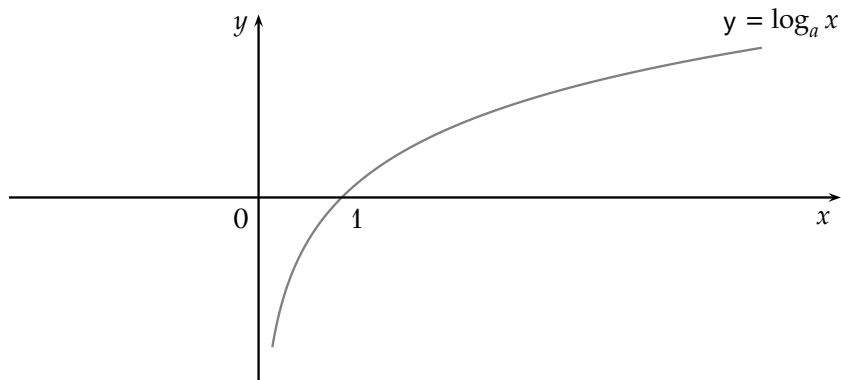
Γράφημα εκθετικής συνάρτησης για  $a > 1$



# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

## Πραγματικές συναρτήσεις

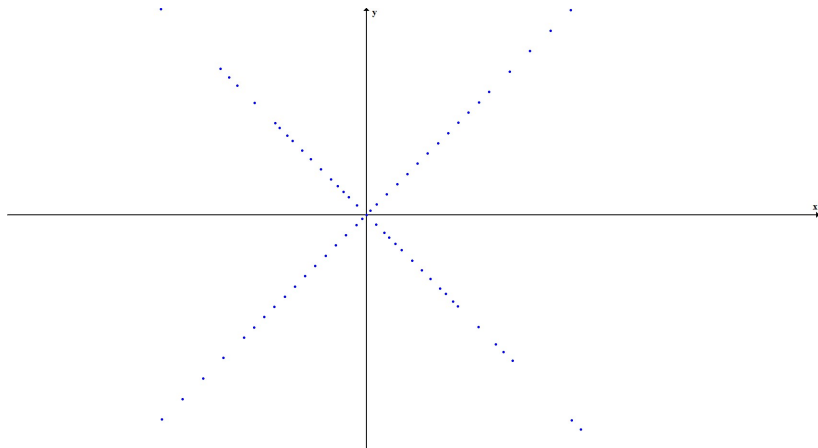
Γράφημα λογαριθμικής συνάρτησης για  $a > 1$



# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

## Πραγματικές συναρτήσεις

$$\text{Η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x, & \text{για } x \in \mathbf{Q} \\ -x, & \text{για } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$



## 4. Όρια και Συνέχεια Συνάρτησης:

- Η έννοια του ορίου συνάρτησης - Συνέχεια
- Αρχή της μεταφοράς
- Συνέχεια γνωστών συναρτήσεων
- Συνέχεια και τοπική συμπεριφορά
- Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής
- Ύπαρξη μέγιστης και ελαχίστης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε κλειστά διαστήματα - Μονότονες συναρτήσεις
- Συνεχείς και «1-1» συναρτήσεις
- Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Λογαριθμική συνάρτηση

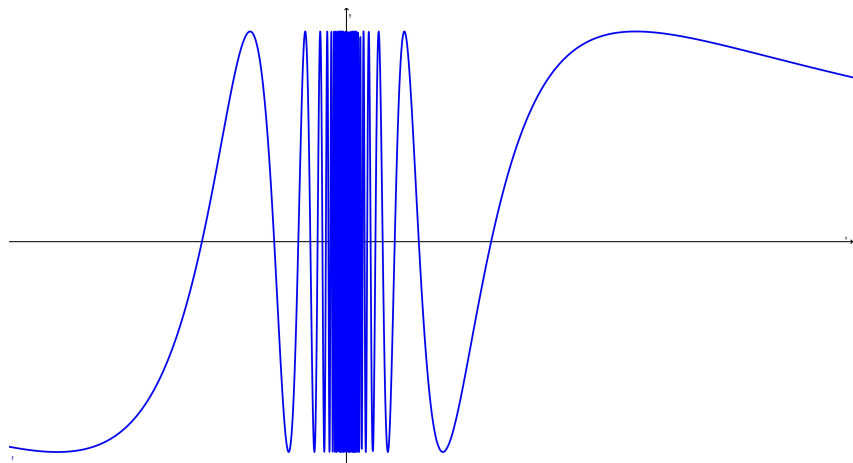
## 5. Παράγωγος:

- Εισαγωγή: Παραδείγματα από τη Γεωμετρία και τη Φυσική
- Η έννοια της παραγώγου
- Κανόνες παραγώγισης
- Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων
- Θεώρημα μέσης τιμής
- Θεώρημα Darboux
- Κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης
- Κριτήρια τοπικών ακροτάτων
- Γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής
- Κανόνες De L'Hospital
- Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις - Σημεία καμπής
- Μελέτη συναρτήσεων

# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

## Παράγωγος συνάρτησης

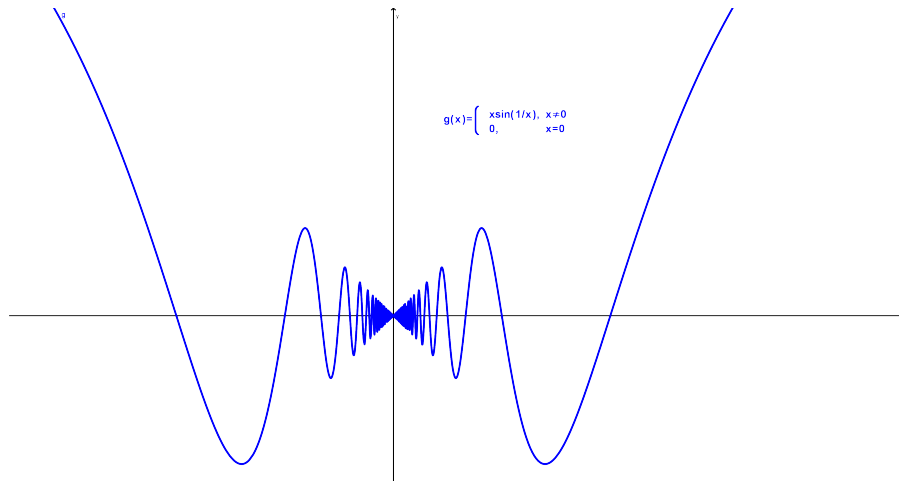
$$\text{Η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

## Παράγωγος συνάρτησης

$$\text{Η συνάρτηση } g(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

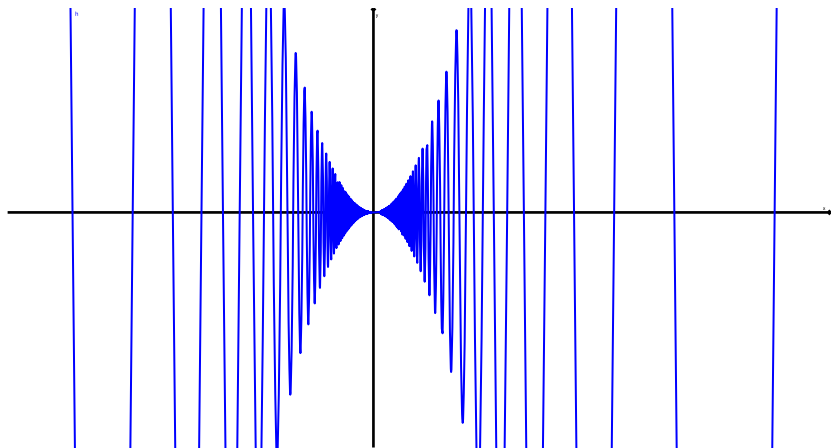




# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I

## Παράγωγος συνάρτησης

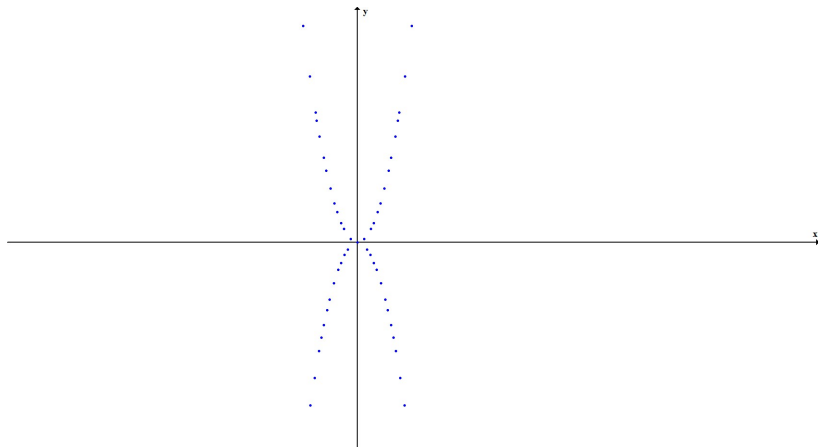
$$\text{Η συνάρτηση } h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I








## Παράγωγος συνάρτησης

$$\text{Η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{για } x \in \mathbf{Q} \\ -x^2, & \text{για } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$



# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

## Βιβλιογραφία

-  Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας:  
« Απειροστικός Λογισμός Ι », Εκδόσεις Συμμετρία.
-  Λ. Τσίτσας: « Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός », Εκδόσεις Συμμετρία.
-  Μ. Spivak: “ Calculus ”, Benjamin (κυκλοφορεί σε Ελληνική μετάφραση με τίτλο: « Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός », Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.)
-  R. Courant and F. John: “ Introduction to Calculus and Analysis ”, Vol. I, Interscience.
-  G. H. Hardy: “ A Course in Pure Mathematics ”, Cambridge University Press.
-  S. Salas and E. Hille: “ Calculus ”, John Wiley.
-  R. Bartle and D. Sherbert: “ Introduction to Real Analysis ”, John Wiley.

# ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι



*Πανεπιστήμιο Αθηνών  
Τμήμα Μαθηματικών  
University of Athens  
Department of Mathematics*