

## Απειροστικός Λογισμός Ι - Συμπληρωματική Ενδιάμεση Εξέταση

7 - 5 - 2022

### Θέμα 1ο.

Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή. Αν αυτό ισχύει αποδείξτε το, διαφορετικά δώστε αντιπαράδειγμα.

- (1) Αν για τα μη κενά υποσύνολα  $A, B$  του  $\mathbb{R}$ , υπάρχει  $\xi \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $a < \xi < b$ , για κάθε  $a \in A$  και κάθε  $b \in B$ , τότε  $\sup A < \inf B$ .
- (2) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι φραγμένη.
- (3) Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{Q}$ , τότε  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

### Θέμα 2ο.

- (α) Δίνονται δύο μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα  $A, B$  του  $\mathbb{R}$  με την ιδιότητα:  
Για κάθε  $a \in A$  υπάρχει  $b \in B$  με  $a \leq b$ .

Δείξτε ότι  $\sup A \leq \sup B$ .

- (β) Δίνεται μια ακολουθία  $(a_n)$  θετικών πραγματικών αριθμών με  $\lim a_n = a > 0$ .  
Αν  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ , δείξτε ότι  $\inf A > 0$ .

### Θέμα 3ο.

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad b_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad c_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n},$$
$$d_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{2}{(n+2)^3} + \dots + \frac{n}{(2n)^3}$$

### Θέμα 4ο.

Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Δείξτε ότι η  $f$  παίρνει μέγιστη τιμή, δηλαδή υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}$  με  $f(x) \leq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

*Καλή επιτυχία!*