

Απειροστικός Λογισμός 1
Παρασκευή 2 Σεπτεμβρίου 2022
Ωρα 9:00–11:00

Θέμα 1.

(α) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και άνω φραγμένα, και θέτουμε

$$A + B := \{a + b : a \in A \text{ και } b \in B\}.$$

Δείξτε ότι $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

(β) Βρείτε τα supremum, infimum, μέγιστο και ελάχιστο (αν υπάρχουν) του συνόλου:

$$A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 2.

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$(i) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^n, \quad (ii) b_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}, \quad (iii) c_n = \frac{2^n n!}{n^n}.$$

Θέμα 3.

Δείξτε ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Θέμα 4.

(α) Έστω $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x \geq 1$.

Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + \sqrt[4]{x}) - f(x)] = 0$.

(β) Ορίζουμε $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ αν $x \in \mathbb{Q}$, και $f(x) = x^3$ αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Εξετάστε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!