$\boxed{\Theta 1}$ $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 1$

ρίζες;

---

(1) p συνεχής, σαν πολ/μο.

$$\left.\begin{array}{l} p(0) = -1 < 0 \\ p(1) = 10 > 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Bolz}} \exists \text{ ρίζα } x_0 \in (0,1).$$

p παραγωγίσιμη, σαν πολ/μο.

(2) $p'(x) = 6x^2 + 6x + 6 = 6(x^2 + x + 1) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow p \uparrow \Rightarrow$ παίρνει την τιμή 0 μόνο μιά φορά.

(2′) Αν έχει 2 ρίζες $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p \text{ συνεχής στο } [x_1, x_2] \\ p \text{ παραγ. στο } (x_1, x_2) \\ p(x_1) = p(x_2) = 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Rolle}} \exists\, \xi \in (x_1, x_2) : p'(\xi) = 0,$$

άτοπο.

$\boxed{\Theta 2}$ $f(x)=x^3-3x^2-1$

min, max στα $[-1,1]$, $(-1,5)$.

(i) Στο $[-1,1]$: συνεχής σε κλειστό $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\exists$ min, max και βρίσκονται:

ή στα άκρα

ή στο εσωτερικό σε σημεία που $\nexists\, f'(x)$

— " — " — " — : $f'(x)=0$.

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } \underbrace{x=2}_{\text{απορρ.}} \notin [-1,1]$$

$$\left.\begin{aligned} f(-1)&=-1-3-1=-5 \\ f(1)&=1-3-1=-3 \\ f(0)&=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \max f=-1 & (\text{στο } 0) \\ \min f=-5 & (\text{στο } -1) \end{cases}$$

(ii) $(-1,5)$ ανοιχτό, δεν ισχύουν τα προηγούμενα.

$f'(x)=0$ δίνει τοπικό, όχι ολικό ακρότατο.

Μελετάμε πεδίο τιμών:

$f'(x)=3x(x-2)$

	-1		0		2		5
f'		$+$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$\left.\begin{aligned} f((-1,0]) &= (f(-1),f(0)] = (-5,-1] \\ f([0,2]) &= [f(2),f(0)] = [-5,-1] \\ f([2,5)) &= [f(2),f(5)) = [-5,49) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f((-1,5)) = (-5,-1] \cup [-5,-1] \cup [-5,49) =$

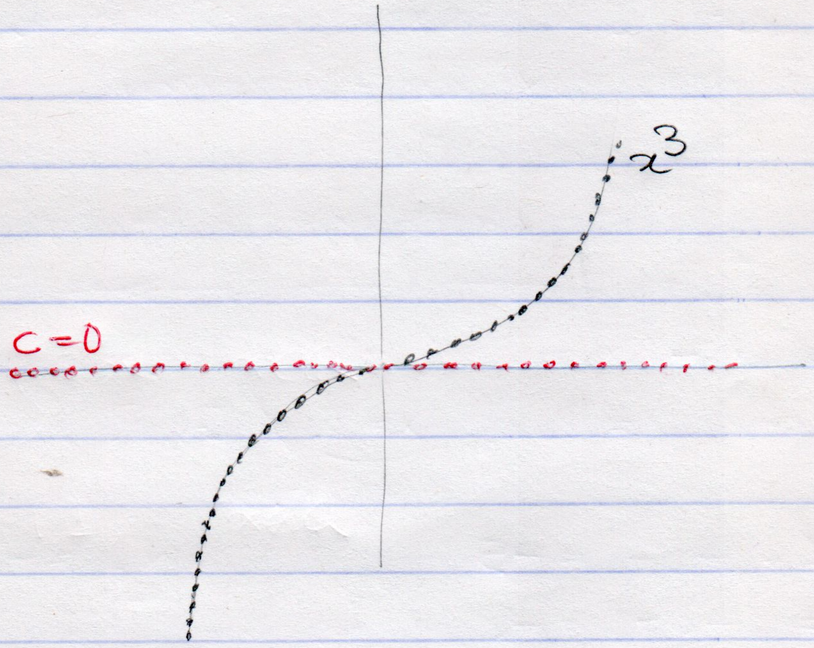
$= [-5,49)$

$\min f = -5$ (στο 2)

και $\nexists$ max.

Θ3

(i) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Q} \\ x^3, & x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$ $\quad \exists?\ f'(0).$



$$\exists?\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$g(x):=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Q} \\ x^2, & x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Έστω $\varepsilon>0$

Επειδή x^2 συνεχής με $0^2=0$, $\exists\,\delta>0$:

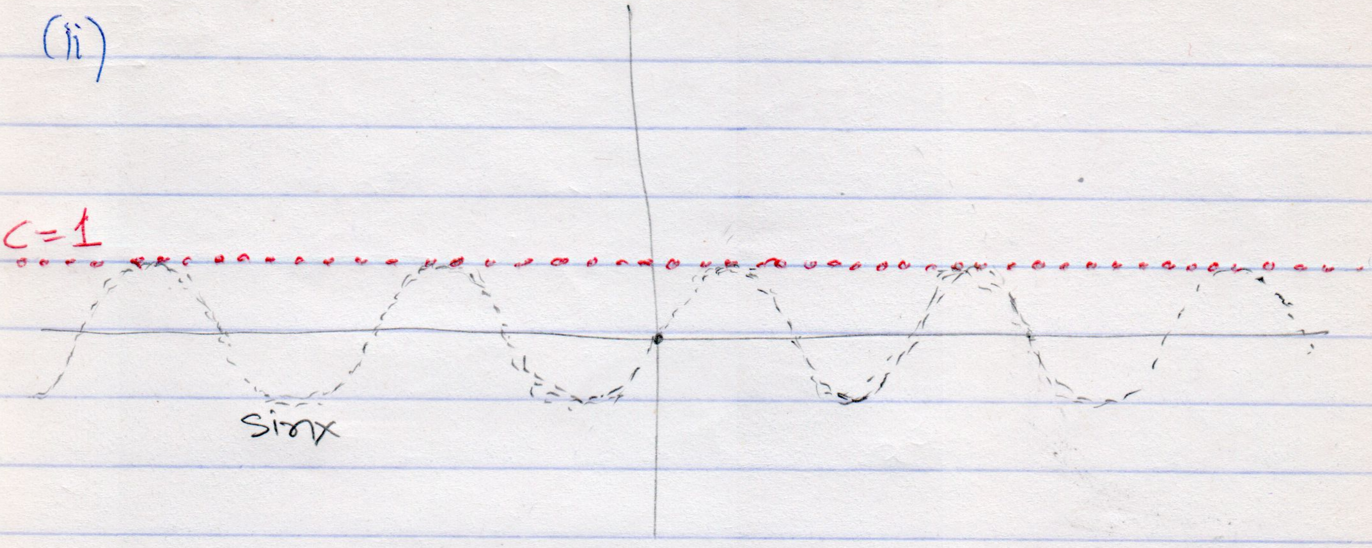
$|x|<\delta \Rightarrow x^2<\varepsilon$ (πράγματι, για $\delta:=\sqrt{\varepsilon}$).

Οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} |x|<\delta \text{ με } x\in\mathbb{Q} \Rightarrow |g(x)|=0<\varepsilon. \\ |x|<\delta \text{ με } x\notin\mathbb{Q} \Rightarrow |g(x)|=x^2<\varepsilon. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} g(x)=0 \rightarrow \exists\ f'(0)=0.$$

(ii)



$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\in\mathbb{Q} \\ 1, & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

$\boxed{\Theta 4}$

$f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, παραγ. με f' φραγμένη.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) - f(\sqrt{x}) \right) = A = ?$$

$\forall\ x > 0$: f συνεχής στο $\left[\sqrt{x}, \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$ και
παραγ. στο $\left(\sqrt{x}, \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\overset{}{\underset{\text{ΘΜΤ}}{\Longrightarrow}}$

$\forall\ x > 0\ \exists\ \xi_x \in \left(\sqrt{x}, \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$:

$$f\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) - f(\sqrt{x}) = f'(\xi_x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Επειδή f' φραγμένη $\Rightarrow \exists\ M > 0$: $|f'(x)| < M$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Άρα

$$0 \leq \left| f\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) - f(\sqrt{x}) \right| = |f'(\xi_x)| \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \leq M \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$A = 0$.

Θ5

$f(x)=\frac{\ln x}{x}, \quad x>0.$

(i) $f(x)=0 \iff \ln x=0 \iff x=1.$
$f(x)<0 \iff x<1$ [και
$f(x)>0 \iff x>1$].
Δεν είναι άρτια - περιττή - περιοδική

(ii) Παραγωγίσιμη ($\Rightarrow$ συνεχής) σε όλο το π.ο.
$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0 \iff \ln x=1 \iff x=e$

$f'(x)>0 \iff x\in(0,e)$. Άρα

$f \uparrow$ στο $(0,e]$ και $f\downarrow$ στο $[e,+\infty)$.
$f(e)=1/e=\max$.

(iii) $f''(x)=\frac{-3+2\ln x}{x^3}=0 \iff \ln x=3/2 \iff$
$\iff x=\sqrt{e^3}$

$f''(x)>0 \iff x>\sqrt{e^3}$ Άρα

f κοίλη στο $(0,\sqrt{e^3}]$ και κυρτή στο $[\sqrt{e^3},+\infty)$.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \Rightarrow$ κατακ. ασύμπτωτη στο 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \underset{(+\infty/+\infty)}{\overset{dLH}{=}} \lim\limits_{+\infty}\frac{1/x}{1}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ οριζ. ασύμπτωτη $c=0$ στο $+\infty$.

(v)

	0		e		$\sqrt{e^3}$	
f'		+	0	−		−
f''		−		−	0	+
f	$-\infty$	↗	max $1/e$	↘	Σ.Κ.	↘