ΜΑΘΗΜΑ

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ. 1}}$ $f, g : A = (a, x_0) \cup (x_0, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγ. :

(i) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in A$.

(ii) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Αν $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Απόδ. Επεκτείνουμε συνεχώς τις f, g στο (a, b), θέτοντας $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Τότε:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}, \quad \forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, b).$$

Επειδή $f'(x)$, $g'(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα (αφού $g'(x)$ δεν έχει ρίζα) και $g(x) - g(x_0) \neq 0$ $\forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ ισχύει ΘΜΤ-Cauchy στο $[x, x_0]$ ή στο $[x_0, x]$, άρα

$$\exists \xi_x \in (x, x_0) \text{ ή } \xi_x \in (x_0, x):$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \quad (*)$$

Έστω τυχαία (x_n) στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ με $x_n \to x_0$

$\Rightarrow x_n < \xi_{x_n} < x_0$ ή $x_0 < \xi_{x_n} < x_n \Rightarrow \xi_n \to x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}}_{(?)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \overset{(*)}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\xi_{x_n})}{g'(\xi_{x_n})} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ. 2}}$ $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγ. με

(i) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, +\infty)$

(ii) $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Αν $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$. ■

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ. 3}}$ $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγ. με:

(i) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

(ii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = +\infty$

Αν $\exists \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$. ■

SOS! ΔΕΝ εφαρμόζουμε dlH αν δεν ελεγχθεί η υπόθ. (ii) (και στα 2 Θεωρήματα)! δηλ ΔΕΝ εφαρμόζουμε dlH αν δεν έχουμε απροσδιόριστη μορφή.

Πχ: $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$.

Ζητάω $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Παρατηρώ ότι $\exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 8$, $\exists \lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{8}{4} = 2$ (όχι απροσδ.)

ΟΜΩΣ:

$f'(x) = 3x^2$,

$g'(x) = 2x$ και

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2}{2x} = \dfrac{3 \cdot 4}{4} = 3$

Ασκ Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x}.$$

Απαντ. $\frac{x-\cos x}{x} = 1 - \frac{\cos x}{x} \Longrightarrow 1-0=1.$

(φραγμένη) x (φθίνουσα)

Όμως: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \xRightarrow{\text{de l' Hôp}} \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sin x}{1}$ $\nexists$

Κανόνας de l' Hôpital: Αν $\exists \lim_{x\to(?)} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow$ $\not\Leftarrow$

$\exists \lim_{x\to(?)} \frac{f(x)}{g(x)}$ (και είναι ίσα.)

ΜΟΡΦΕΣ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑΣ

$\frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty}$ γνωστά. Άλλες μορφές: (1) $0(\pm\infty)$ → $\frac{0}{0}$, → $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

(2) $+\infty+(-\infty)$

$$\lim_{\substack{f(x)\to+\infty \\ g(x)\to-\infty}} f(x)+g(x) = \lim\left(\frac{f(x)g(x)}{g(x)} + \frac{f(x)g(x)}{f(x)}\right) =$$

$$= \lim\left(\frac{1}{g(x)}+\frac{1}{f(x)}\right)\cdot f(x)g(x)$$

(3) 0^0 $\quad f(x)\to 0,\ g(x)\to 0$ $\quad \lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{(\ln f(x))\cdot g(x)}$

$= e^{\lim(\ln f(x))\cdot g(x)} = \dots$

(4) $(+\infty)^0$ $\quad f(x)\to+\infty \quad g(x)\to 0$

$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)\cdot g(x)}$

(5) $1^{\pm\infty}$ $\quad f(x)\to 1 \quad g(x)\to\pm\infty.$

$f(x)^{g(x)} = e^{(\ln f(x))\, g(x)}$ ■

Πχ.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim e^{x\ln x} \overset{\text{exp συνεχής}}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln x} =$

$= \exp\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x}\right) \overset{\text{dlH}}{=}$

$= \exp\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2}\right) =$

$= \exp\left(\lim\limits_{x\to 0} (-x)\right) = \exp 0 = 1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} =$

$= \frac{0}{1+1+0} = 0.$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ}}$ (Τοπικ. ακρότατα της f'').

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$: $f'(x_0)=0$.

(i) Αν $\exists\, f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ έχει τοπ. ελάχιστο στο x_0.

(ii) Αν $\exists\, f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ έχει τοπ. μέγιστο στο x_0.

Σημείωση: Αν $f''(x_0)=0$ ή αν $\nexists\, f''(x_0)$ $\Rightarrow$ δεν γνωρίζουμε!

Απόδ (i)

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$$

$\Rightarrow \exists\, \delta>0 : \forall\, x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x\neq x_0$ $f'(x)$, $x-x_0$ ομόσημα

$\Rightarrow f'(x)>0$, για $x>x_0$ και

$\Rightarrow f'(x)<0$ για $x<x_0$

$x_0-\delta$		x_0		$x_0+\delta$
	$-$		$+$	

Έστω $y\in(x_0-\delta, x_0)$. Από ΘΜΤ στο $[y, x_0]$:

$$\exists\, x\in(y,x_0):\quad f'(x)=\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y)>f(x_0)$$

Έστω $y\in(x_0, x_0+\delta)$. Από ΘΜΤ στο $[x_0, y]$

$$\exists\, x\in(x_0,y):\quad f'(x)=\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y)>f(x_0).$$

Δηλ. $\forall\, y\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$: $f(y)\geq f(x_0)$.

Άρα έχει ελάχιστο στο x_0 ∎