# Προσομοίωση 2018-19
# Σειρά Ασκήσεων 1

**ΑΣΚΗΣΗ 1.** Έστω

$$\theta = \int_2^\infty e^{-x^2/2} \sin(2\pi x) dx$$

Να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας προσομοίωση Monte Carlo. Συγκεκριμένα, να γραφεί μια συνάρτηση Matlab που παίρνει ως όρισμα το ζεύγος $(n, \alpha)$, και δίνει ένα διάστημα εμπιστοσύνης $(1-\alpha)100\%$) για το $I$ βασισμένο σε ένα ψευδοτυχαίο δείγμα μεγέθους $n$.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.** Έστω $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ διανυσματική συνεχής τυχαία μεταβλητή με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\underline{x})$, και στήριγμα στο σύνολο $A \subset R^k$. Έστω επίσης $B \subset A$ και μια τυχαία μεταβλητή $\underline{U} = (U_1, \ldots, U_k)$ με ς.π.π.

$$f_Y(\underline{y}) = \begin{cases} af(\underline{y}), & \underline{y} \in B \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Να προτείνετε έναν αλγόριθμο αποδοχής/απόρριψης για τη δημιουργία ψευδοτυχαίων παρατηρήσεων από την κατανομή $f_Y$.

**Υπόδειξη:** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ως βοηθητική κατανομή $g = f$.

**ΑΣΚΗΣΗ 3.** Ως εφαρμογή της προηγούμενης άσκησης, έστω $(X, Y, Z)$ τυχαίο διάνυσμα που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο

$$\{(x, y, z) : x \geq y \geq z, x^2 + y^2 \leq 3/2\, z \geq 0\}.$$

Να εκτιμηθεί η παράμετρος

$$\theta = E(X^2 + Y^2 + Z^2).$$

**ΑΣΚΗΣΗ 4.** Μια ασφαλιστική εταιρεία αποζημιώνει μια συνγκεκριμένη κατηγορία ιατρικών μηχανημάτων που βρίσκονται σε εγγύηση ως εξής: Αν το μηχάνημα παρουσιάσει βλάβη μέσα στους πρώτους 6 μήνες της λειτουργίας του, η βλάβη αποζημιώνεται εξ ολοκλήρου. Αν η βλάβη παρουσιαστεί μετά από 6 μήνες, αλλά πριν το ένα έτος αποζημιώνεται κατά το ποσό της βλάβης με αφαίρεση 5% για κάθε μήνα λειτουργίας μετά τους 6 μήνες (π.χ. αν η βλάβη παρουσιαστεί στον 7ο μήνα αποζημιώνεται κατά 95%, στον 8ο κατά 90% κ.ο.κ.), ενώ αν η βλάβη παρουσιαστεί μετά τον 1ο χρόνο λειτουργίας, αποζημιώνεται με επιπλέον αφαίρεση κατά 15% για κάθε χρόνο λειτουργίας πέραν του πρώτου (π.χ. κατά τη διάρκεια του δεύτερου έτους αποζημιώνεται κατά 55%: αφαιρείται 30% για τους 6 μήνες του πρώτου έτους και επιπλέον 15% λόγω του δεύτερου έτους).

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος μεταξύ εμφάνισης βλαβών είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 3/2 έτη. Το ποσό της βλάβης είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $200t$, όπου $t$ ο συνολικός χρόνος λειτουργίας (σε μήνες) του μηχανήματος από την έναρξη της εγγύησης και τυπική απόκλιση ίση με 100 ευρώ.

Έστω $X$ το συνολικό ποσό που θα κληθεί να πληρώσει η εταιρεία σε όλη τη διάρκεια κάλυψης αυτού ενός μηχανήματος αυτής της κατηγορίας.

(α) Να γραφεί συνάρτηση Matlab που υλοποιεί ένα σενάριο προσομοίωσης για τη δημιουργία μιας ψευδοτυχαίας παρατήρησης από την κατανομή της $X$.

(β) Να εκτιμηθεί η μέση τιμή της $X$ μέσω διαστήματος εμπιστοσύνης 95% βασισμένο σε 1000 σενάρια προσομοίωσης.

**ΑΣΚΗΣΗ 5.** Να σχεδιαστεί μια συνάρτηση Matlab που υλοποιεί την άσκηση 4.7 του Ross.

**ΑΣΚΗΣΗ 6.** Να σχεδιαστεί μια συνάρτηση Matlab που υλοποιεί την άσκηση 4.19 του Ross.

**ΑΣΚΗΣΗ 7.** Να σχεδιαστεί μια συνάρτηση Matlab που υλοποιεί την άσκηση 5.16 του Ross.

**ΑΣΚΗΣΗ 8.** Έστω μη αρνητική συνεχής τ.μ. $X$ που παριστάνει το χρόνο ζωής ενός μηχανήματος, με σππ $f(x)$, ασκ $F(x)$, συνάρτηση έντασης κινδύνου (hazard rate function) $h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$, και $H(x) = \int_0^x h(y)dy$.

**(α)** Δείξτε ότι μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών της $X$ προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης $H(X) = Y$, όπου $Y \sim Exp(1)$.

**(β)** Δείξτε ότι η ασκ της δεσμευμένης κατανομής $X|X > s$ είναι

$$F_{X|X>s}(s+t) = 1 - e^{-\int_s^{s+t} h(x)dx}.$$

**(γ)** Δείξτε ότι μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών από την κατανομή $X|X > s$ προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης $H(X) = H(s) + Y$, όπου $Y \sim Exp(1)$.

**ΑΣΚΗΣΗ 9.** Έστω ότι η διάρκεια ζωής $X$ ενός μηχανήματος ακολουθεί κατανομή με συνάρτηση έντασης κινδύνου $h(x) = be^{cx}$, όπου $b, c$ γνωστές θετικές σταθερές.

**(α)** Δημιουργήστε γεννήτριες τυχαίων αριθμών από την κατανομή της $X$ και της $X|X > s$, για $s > 0$.

**(β)** Σχεδιάστε συνάρτηση Matlab που παίρνει ως ορίσματα τα $b, c, s, n$ και εκτιμά τη μέση τιμή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής ενός μηχανήματος ηλικίας $s$, χρησιμοποιώντας $n$ σενάρια προσομοίωσης της $X|X > s$. (Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι $X|X > s - s$).

**(γ)** Για τιμές $b = 0.1, c = 0.3$ δημιουργήστε ένα γράφημα του υπολειπόμενου χρόνου ζωής ως συνάρτηση της ηλικίας $s$ για $0 \leq s \leq 10$.

**ΑΣΚΗΣΗ 10.** Έστω ότι η διάρκεια ζωής $X$ ενός ατόμου ακολουθεί κατανομή με συνάρτηση έντασης κινδύνου $h(x) = be^{cx}$, όπου $b, c$ γνωστές σταθερές.

Μια ασφαλιστική εταιρεία προσφέρει ένα συμβόλαιο ασφάλειας ζωής με τους παρακάτω όρους. Στο τέλος της ζωής του ατόμου οι κληρονόμοι του θα λάβουν ποσό ίσο με $A$. Κατά τη διάρκεια της υπόλοιπης ζωής του το άτομο θα πληρώνει ασφάλιστρο $w$ ανά μονάδα χρόνου (υποθέστε συνεχή χρόνο).

Έστω $V_r(s)$ η μέση καθαρή παρούσα αξία του συμβολαίου για ένα άτομο ηλικίας $s$, με στιγμιαίο επιτόκιο αποπληθωρισμού ίσο με $r$:

$$V_r(s) = E_{X|X>s}[Ae^{-rX} - \int_s^X we^{-rt}dt].$$

Για τιμές $b = 10^{-3}, c = 6 \cdot 10^{-2}, A = 10^5, w = 1000$, να εκτιμήσετε την μέση καθαρή παρούσα αξία του συμβολαίου για ένα άτομο ηλικίας 20 ετών και για ένα άτομο ηλικίας 50 ετών, με ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% και $10^5$ σενάρια προσομοίωσης.