Υπαρξη και μοναδικοτητα τετραγωνικης ριζας για συμπαγεις θετικους τελεστες

Εχουμε δει οτι καθε θετικος τελεστης εχει μοναδικη θετικη τετραγωνικη ριζα. Εδω θα δουμε μια ευκολη αποδειξη για την περιπτωση συμπαγους τελεστη, που βασιζεται στο φασματικο θεωρημα.

Πρόταση 1. *Εστω $A \in B(H)$ συμπαγης θετικος τελεστης. Υπαρχει μοναδικος θετικος τελεστης $B \in B(H)$ με $B^2 = A$. (Επιπλεον ο B ειναι συμπαγης.)*

Απόδειξη. Απο το Φασματικο Θεωρημα για συμπαγεις τελεστες, για μια αριθμηση $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ του συνολου $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών του A, εχω

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

οπου P_n η προβολη στον ιδιοχωρο $M_{\lambda_n}(A)$, και η σειρα συγκλινει στην νορμα του $\mathcal{B}(H)$. Επειδη η ακολουθια των ιδιοτιμων του A ειναι μηδενικη, αν ειναι απειρη, η ακολουθια $(\sqrt{\lambda_n})$ (θυμιζω οτι $\lambda_n \geq 0$ γιατι $A \geq 0$) ειναι κι αυτη μηδενικη, επομενως η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} P_n$ συγκλινει και αυτη στην νορμα του $\mathcal{B}(H)$. Θετουμε

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} P_n$$

και παρατηρουμε ότι ο τελεστης B ειναι συμπαγης, γιατι ειναι οριο στην νορμα του $\mathcal{B}(H)$ φραγμενων τελεστων πεπερασμενης ταξης (καθε $\sqrt{\lambda_n} P_n$ εχει πεπερασμενη ταξη, αν δεν ειναι 0). Βεβαιως ο B ειναι θετικος τελεστης. Ικανοποιει $B^2 = A$, γιατι

$$B^2 = B \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} P_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} B P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}^2 P_n = A$$

αφου $BP_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} P_k \right) P_n = \sqrt{\lambda_n} P_n$ γιατι $P_k P_n = 0$ οταν $k \neq n$.

Μοναδικοτητα Εστω $C \in \mathcal{B}(H)$ θετικος τελεστης ωστε $C^2 = A$ (δεν υποθετουμε a priori οτι ειναι συμπαγης). Θα δειξουμε οτι $C = B$ (οποτε θα εχουμε οτι ο C ειναι συμπαγης). Για να το δειξουμε, εφοσον οι ιδιοχωροι M_λ of A παραγουν τον χωρο H, αρκει να δειξουμε οτι καθε M_λ ειναι C-αναλλοιωτος και οτι $C|_{M_\lambda} = B|_{M_\lambda}$. Ισοδυναμα αρκει να δειξουμε οτι για καθε $\lambda \in \sigma_p(A)$ και καθε $x \in M_\lambda(A)$ εχουμε $Cx = \sqrt{\lambda} x$.

Για $\lambda = 0$ αυτο ειναι ευκολο: αν $x \in M_0(A)$ τοτε $C^2 x = Ax = 0$ και αρα $Cx = 0$ οπως εχουμε δειξει πολλες φορες: $\|Cx\|^2 = \langle Cx, Cx \rangle = \langle C^2 x, x \rangle = 0$.

Για την περιπτωση $\lambda > 0$ εχουμε:

Εστω $y := Cx - \sqrt{\lambda} x$, να δειξουμε οτι $y = 0$. Γραφουμε $\mu = \sqrt{\lambda}$ για ευκολια και εχουμε

$$\begin{aligned} \langle Cy, y \rangle + \mu \|y\|^2 &= \langle (C + \mu) y, y \rangle = \langle (C + \mu)(C - \mu) x, y \rangle = \langle (C^2 - \mu^2) x, y \rangle \\ &= \langle (A - \lambda) x, y \rangle = 0 \end{aligned}$$

αφου $x \in M_\lambda(A)$. Συνεπως $\langle Cy, y \rangle + \mu \|y\|^2 = 0$ και αρα $\|y\|^2 = 0$ γιατι $\langle Cy, y \rangle \geq 0$ και $\mu = \sqrt{\lambda} > 0$. □