

# Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

<http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/>

Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026

## Περιεχόμενα

|          |                                          |           |            |                                              |           |
|----------|------------------------------------------|-----------|------------|----------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Εισαγωγικά</b>                        | <b>2</b>  | <b>4.2</b> | <b>Φραγμένοι τελεστές</b>                    | <b>17</b> |
| <b>2</b> | <b>Γραμμικοί χώροι</b>                   | <b>3</b>  | <b>4.3</b> | <b>Ο συζυγής τελεστής</b>                    | <b>19</b> |
| <b>3</b> | <b>Χώροι με εσωτερικό γινόμενο</b>       | <b>5</b>  | <b>4.4</b> | <b>Παραδείγματα</b>                          | <b>20</b> |
| 3.1      | Χώροι Hilbert                            | 9         | <b>4.5</b> | <b>Ο Χώρος των Τελεστών</b>                  | <b>23</b> |
| 3.2      | Συνεχείς γραμμικές μορφές. Θεώρημα Riesz | 10        | <b>5</b>   | <b>Κατηγορίες τελεστών</b>                   | <b>26</b> |
| 3.3      | Ορθοκανονικές Βάσεις. Ισομορφισμοί       | 11        | 5.1        | Τελεστές φυσιολογικοί, αυτοσυζυγείς, unitary | 26        |
| 3.4      | Η πλήρωση. Ο χώρος $L^2$                 | 13        | 5.2        | Θετικοί τελεστές                             | 27        |
| <b>4</b> | <b>Φραγμένοι τελεστές</b>                | <b>15</b> | 5.3        | Τετραγωνική ρίζα - Πολική αναπαράσταση       | 28        |
| 4.1      | Γραμμικοί τελεστές και πίνακες           | 15        | 5.4        | Προβολές                                     | 30        |
|          |                                          |           | <b>6</b>   | <b>Συμπαγείς τελεστές</b>                    | <b>33</b> |
|          |                                          |           | <b>7</b>   | <b>Φασματική Θεωρία συμπαγών τελεστών</b>    | <b>37</b> |

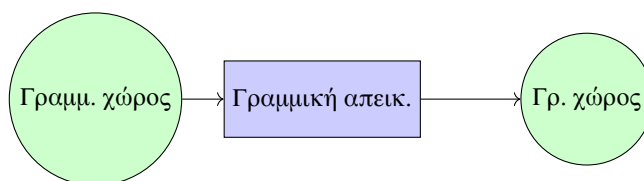
# 1 Εισαγωγικά

## Γουατ ιξ αν Οπερείτωρ?



Αρχή της υπέρθεσης (superposition principle).

Αν στην είσοδο  $u_1$  αντιστοιχεί έξοδος  $v_1$  και στην είσοδο  $u_2$  αντιστοιχεί έξοδος  $v_2$  και  $\lambda$  αριθμός, τότε για την είσοδο  $u_1 + \lambda u_2$  αναμένουμε έξοδο  $v_1 + \lambda v_2$ .



**Παράδειγμα 1.**  $T : f \mapsto a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$ : διαφορικός τελεστής (εδώ οι  $a_i$  είναι «καλές» συναρτήσεις).

Πού ορίζεται; Στον χώρο  $C_2(\Omega)$ .

**Παράδειγμα 2.**  $T : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto [a_{i,j}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  ( $[x_i] \in \mathbb{C}^n, [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$ )

**Παράδειγμα 3.**  $T : f \mapsto Tf$  όπου  $(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$ : ολοκληρωτικός τελεστής (εδώ  $g$  «καλή» συνάρτηση,  $2\pi$ -περιοδική).

Παρατήρηση: Αν  $f_n(x) = e^{inx}$  βρίσκω

$$Tf_n = \hat{g}(n)f_n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

όπου  $\hat{g}(n)$  (μγαδικοί) αριθμοί.

Δηλαδή, ως προς την οικογένεια  $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ , ο  $T$  **διαγωνοποιήθηκε!**

$$T \sim \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η οικογένεια  $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Γιατί; Γιατί είναι **ορθοκανονική**. Άρα, είναι βάση του χώρου που παράγει. Ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης, είναι όμως πυκνός στους χώρους που ενδιαφέρουν στην Ανάλυση...

## 2 Γραμμικοί χώροι

### Γραμμικοί χώροι

$\mathbb{K}$  είναι το σώμα  $\mathbb{R}$  ή  $\mathbb{C}$ .

**Ορισμός 1.** Ένα  $X \neq \emptyset$  λέγεται  **$\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος** αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις  $+$  :  $X \times X \rightarrow X$  και  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$  ώστε

(I) **Αξιώματα της πρόσθεσης:**  $\forall x, y, z \in X$ ,

(i)  $x + y = y + x$ .

(ii)  $x + (y + z) = (x + y) + z$ .

(iii)  $\exists \vec{0} \in X$  ώστε  $\forall x \in X, \vec{0} + x = x$ .

(iv)  $\forall x \in X \exists (-x) \in X$  ώστε  $x + (-x) = \vec{0}$ .

(II) **Αξιώματα του πολλαπλασιασμού:**  $\forall x, y \in X$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,

(i)  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ .

(ii)  $1x = x$ .

(iii)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ .

(iv)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ .

### Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων

- Το  $\mathbb{C}$ .

- Αν  $n \in \mathbb{N}$ , ο  $\mathbb{C}^n$  που αποτελείται από όλες τις  $n$ -αδες μιγαδικών αριθμών,

$$\vec{x} = (x(1), x(2), \dots, x(n))$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Γράφουμε καμιά φορά τα στοιχεία του  $\mathbb{C}^n$  ως διανύσματα-στήλες (column vectors).

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1), \dots, x(n)]^T$$

(το σύμβολο  $T$  σημαίνει «ανάστροφος» (transpose)).

### Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων II

- Ο χώρος

$$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C} \text{ τ.ω. } \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ με } x(n) = 0 \forall n > n_x\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Έστω  $e_m = (\delta_m(n))$  όπου  $\delta_m(n) = 1$  όταν  $n = m$  και  $\delta_m(n) = 0$  αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια  $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον  $c_{00}$ : κάθε  $x = x(n) \in c_{00}$  γράφεται (μοναδικά) ως γραμμικός συνδυασμός  $x = \sum_{m=1}^{n_x} x(m)e_m$ .

Δηλαδή η  $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$  είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του  $c_{00}$ .

Παρατηρούμε ότι ο  $c_{00}$  είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  των οποίων ο φορέας  $\text{supp } x := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$  είναι πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο  $\{1, 2, \dots, n_x\}$ ).

### Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων III

- Αν  $A \neq \emptyset$  και  $\mathbb{K}^A$  είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ , τότε το  $\mathbb{K}^A$  γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο: αν  $f, g \in \mathbb{K}^A$  και  $\lambda \in \mathbb{K}$ , ορίζουμε  $f + g, \lambda f \in \mathbb{K}^A$  θέτοντας

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad , \quad t \in A.$$

- Παράδειγμα: Αν  $A = [n] \times [m]$  (εδώ  $[n] := \{1, \dots, n\}$ ) τότε  $\mathbb{K}^A$  είναι ο χώρος των  $M_{nm}(\mathbb{K})$  των  $n \times m$  πινάκων με συντελεστές από το  $\mathbb{K}$ .

### Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων IV

- Ο χώρος  $\mathcal{R}[0, 1]$  των Riemann-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ .  
Κάθε συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  γράφεται μοναδικά  $f = u + iv$  όπου  $u(t) := \frac{1}{2}(f(t) + \overline{f(t)})$ ,  $v(t) := \frac{1}{2i}(f(t) - \overline{f(t)})$  (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η  $f$  λέγεται (Riemann)-ολοκληρώσιμη όταν οι  $u$  και  $v$  είναι Riemann-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int f(t)dt := \int u(t)dt + i \int v(t)dt,$$

Ο  $\mathcal{R}[0, 1]$  είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

- Ο χώρος  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$  αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγ. αριθμών (= συναρτήσεις  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλ.  $\sum_n |x(n)|^2 < \infty$ . Είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

### Γραμμικοί χώροι

Αν  $E$  γραμμικός χώρος και  $x \in E$ ,  $A \subseteq E$ , λέμε ότι το  $x$  ανήκει στην **γραμμική θήκη του  $A$**  (γράφουμε  $x \in \text{span}(A)$ ) ή ότι είναι **γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του  $A$** , αν υπάρχουν (πεπερ. πλήθος)  $x_1, \dots, x_n \in A$  και  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  ώστε

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Τα διανύσματα  $y_1, \dots, y_m$  λέγονται **γραμμικά εξαρτημένα** αν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ισοδύναμα, αν το  $\vec{0}$  είναι **μη τετριμμένος** γραμμικός συνδυασμός τους, δηλ. αν υπάρχουν  $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ , **όχι όλα 0**, ώστε

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_m y_m = \vec{0}.$$

Είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** αν δεν υπάρχουν τέτοια  $\mu_k$ , δηλαδή αν

$$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0.$$

### Γραμμικοί χώροι

Ένα μη κενό  $M \subseteq E$  λέγεται **γραμμικά εξαρτημένο** αν περιέχει **κάποια**  $y_1, \dots, y_m$  που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισοδύναμα, αν υπάρχει κάποιο  $x \in M$  που είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του  $M \setminus \{x\}$ , δηλ. ανήκει στην γραμμική θήκη του  $M \setminus \{x\}$ .

Το  $M$  είναι **γραμμικά ανεξάρτητο** αν για κάθε **πεπερασμένο** σύνολο  $\{x_1, \dots, x_n\}$  στοιχείων του  $M$  ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Ένας  $F \subseteq E$  λέγεται **(γραμμικός) υπόχωρος** του  $E$  αν  $\text{span}(F) \subseteq F$ , δηλαδή αν  $x, y \in F$  και  $\lambda \in \mathbb{K} \implies x + \lambda y \in F$ .

### Γραμμικές απεικονίσεις

**Ορισμός 2.** Έστω  $E, F$  (πραγματικοί ή μιγαδικοί) **γραμμικοί (:διανυσματικοί) χώροι**. Μια απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  λέγεται **γραμμική** αν

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y).$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται **(γραμμικός) ισομορφισμός** αν επί πλέον είναι 1-1 και επί.

Δυο γραμμικοί χώροι  $E, F$  λέγονται **ισόμορφοι** αν υπάρχει ισομορφισμός  $T : E \rightarrow F$ .

## 3 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

**Ορισμός 3.** Έστω  $E$  ένας  $\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ή  $\mathbb{C}$ ). Ένα **εσωτερικό γινόμενο** (**inner product ή scalar product**) στον  $E$  είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

- (i)  $\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$
- (ii)  $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
- (iii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- (iv)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

για κάθε  $x, x_1, x_2, y \in E$  και  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$$\text{άρα } (i)' \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle.$$

**Πρόταση 4** (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). Αν  $E$  είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,

(a) για κάθε  $x, y \in E$  ισχύει

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}.$$

(b) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα  $x, y$  είναι γραμμικά εξαρτημένα.

**Πρόταση 5.** Αν  $E$  είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση

$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  όπου  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  είναι νόρμα στον  $E$ .

**Χώροι με εσωτερικό γινόμενο: Παρατηρήσεις**

(α) Μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) του ορισμού του εσωτερικού γινομένου λέγεται **ημι-εσωτερικό γινόμενο**.

Ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την θεμελιώδη ανισότητα Cauchy-Schwarz (όχι όμως και το (b) της Πρότασης).

(β) Αρκετοί συγγραφείς (ιδιαίτερα σε συγγράμματα μαθηματικής φυσικής ή άλλων εφαρμογών) ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο ώστε να είναι γραμμικό ως προς την δεύτερη μεταβλητή και αντιγραμμικό ως προς την πρώτη. Έτσι, ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο στον  $\mathbb{C}^n$  ως εξής:  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x(k)} y(k)$ .

(γ) Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αποκαλείται καμιά φορά και **χώρος προ-Hilbert** (pre-Hilbert space).

**Γραμμικοί χώροι με νόρμα**

**Νόρμα** σε έναν γραμμ. χώρο  $X$  είναι μια απεικόνιση  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  ώστε για κάθε  $x, y \in X$  και  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

1.  $\|x\| = 0$  αν και μόνο αν  $x = 0$ ,
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  και
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (τριγωνική ανισότητα).

**Ορισμός 6.** Αν  $\|\cdot\|$  είναι μια νόρμα στον  $X$ , τότε το ζεύγος  $(X, \|\cdot\|)$  λέγεται **χώρος με νόρμα**.

Η συνάρτηση  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  με  $d(x, y) = \|x - y\|$ ,  $x, y \in X$  είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον  $X$  από τη νόρμα του). Όταν ο μετρ. χώρος  $(X, d)$  είναι πλήρης, ο  $(X, \|\cdot\|)$  λέγεται **χώρος Banach**.

### Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Αν  $(X, \|\cdot\|)$  είναι χώρος με νόρμα και  $x_n, x \in X$ , τότε  $x_n \rightarrow x$  σημαίνει  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ .

**Παρατήρηση** Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε.

Για παράδειγμα, η σύγκλιση ως προς τη νόρμα supremum στον  $C([a, b])$  (δες πιο κάτω) εκφράζει την **ομοιόμορφη σύγκλιση** μιας ακολουθίας  $(f_n)$  συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \iff f_n \rightarrow f \text{ ομοιόμορφα στο } [a, b].$$

Επομένως κάθε  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  γίνεται μετρικός χώρος  $(E, d)$  με

$$d(x, y) := \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2}, \quad x, y \in E$$

στον οποίο οι γραμμικές πράξεις

$$+ : (E, d) \times (E, d) \rightarrow (E, d) : (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : (\mathbb{K}, |\cdot|) \times (E, d) \rightarrow (E, d) : (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

είναι συνεχείς. Επίσης η απεικόνιση

$$(E, d) \times (E, d) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

είναι συνεχής.

**Πρόταση 7.** (α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\text{για κάθε } x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\text{αν } x, y \in E \text{ και } \langle x, y \rangle = 0, \text{ τότε } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

### Καθετότητα

**Ορισμός 8.** Δύο στοιχεία  $x, y$  ενός χώρου  $E$  με εσωτερικό γινόμενο λέγονται **κάθετα** (συμβολικά  $x \perp y$ ) όταν  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Μια οικογένεια  $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$  λέγεται **ορθοκανονική (orthonormal)** αν  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  για κάθε  $i, j \in I$ .

Ορθοκανονική  $\Rightarrow$  γραμμικά ανεξάρτητη. Προς την αντίστροφη:

**Πρόταση 9** (Διαδικασία Gram-Schmidt). Αν  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  στον  $E$  ώστε, για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ , να ισχύει<sup>1</sup>  $[e_n : n = 1, 2, \dots, k] = [x_n : n = 1, 2, \dots, k]$ .

Κάθε υπόχωρος  $F \subseteq E$  πεπερασμένης διάστασης έχει μια αλγεβρική βάση  $\{e_1, \dots, e_n\}$  που είναι ορθοκανονική. Κάθε  $x \in F$  γράφεται μοναδικά  $x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ . (γιατί;)

<sup>1</sup>με  $[A]$  ή  $\text{span } A$  θα συμβολίζουμε την γραμμική θήκη ενός  $A \subseteq E$ .

### Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

**Λήμμα 10.** Έστω  $E$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο,  $f \in E$  και  $F$  πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του  $E$ . (1) Υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα  $S(f) \in F$  που είναι πλησιέστερο στο  $f$ . (2) Επιπλέον το  $f - S(f)$  είναι κάθετο στον  $F$  και αντίστροφα, αν  $g \in F$  και  $f - g \perp F$ , τότε  $g = S(f)$ .

Για την αποδείξη:  $\leadsto$

**Λήμμα 11.** Έστω  $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$  ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε  $f \in E$  έχουμε

$$(\alpha) \quad \|f\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle f, e_k \rangle|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{οπου } S_n(f) := \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k.$$

$$(\beta) \text{ (Ανισότητα Bessel)} \quad \|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |\langle f, e_k \rangle|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν  $F_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$  τότε, για κάθε  $f \in E$ ,

$$(\gamma) \quad f - S_n(f) \perp F_n$$

και το  $S_n(f)$  είναι το μοναδικό διάνυσμα  $g \in F_n$  που είναι κάθετο στον  $F_n$ .

$$(\delta) \quad \text{dist}(f, F_n) = \|f - S_n(f)\|,$$

δηλαδή  $\|f - g\| \geq \|f - S_n(f)\| \quad \forall g \in F_n$  με ισότητα αν  $g = S_n(f)$ .

### Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (γ), (δ))

$$(\gamma) \quad \text{Κάθε } g \in F \text{ γράφεται } g = \sum_{k=1}^n \langle g, e_k \rangle e_k.$$

$$\begin{aligned} \text{Τώρα: } (f - g) \perp F &\iff \langle f - g, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \in [n] \iff \langle g, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle \quad \forall k \in [n] \\ &\iff g = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k = S(f). \end{aligned}$$

(δ) Στην (α) βάλε  $f - g$  στη θέση του  $f$ , με  $g \in F$ .

#### Παρατηρήσεις

• Αν  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  είναι κάποια ορθοκανονική βάση του  $F$ , το  $S(f)$  δίνεται από τον τύπο  $S(f) = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k$ .

• Η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ : \vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \rightarrow \left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο  $\vec{\lambda} = (\langle f, e_1 \rangle, \langle f, e_2 \rangle, \dots, \langle f, e_n \rangle) \in \mathbb{K}^n$ .

### 3.1 Χώροι Hilbert

**Ορισμός 12.** Ένας χώρος  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **χώρος Hilbert** αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

**Παραδείγματα (a)** Ο χώρος  $\mathbb{K}^n$ , εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k)\overline{y(k)}$ , είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$ , αλλά **δεν είναι** χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

**(b)** Κάθε χώρος  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  με εσωτερικό γινόμενο και  $\dim E < \infty$  είναι χώρος Hilbert.

**(c)** Ο χώρος  $\ell^2$ , με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$ , είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος  $c_{00}$  των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του.

Επομένως ο χώρος  $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$  είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά **όχι** Hilbert, εφόσον δεν είναι πλήρης.

**(d)** Ο χώρος  $C([a, b])$  **δεν είναι** πλήρης ως προς την νόρμα  $\|\cdot\|_2$  που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

**Θεώρημα 13** (Πλησιέστερο διάνυσμα (III)). Έστω  $F$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο,  $E \neq \emptyset$  **κυρτό και πλήρες** υποσύνολο του  $F$ . Αν  $x \in F \setminus E$ , τότε υπάρχει μοναδικό  $y_x \in E$  πλησιέστερο προς το  $x$ , δηλαδή τέτοιο ώστε  $\|x - y_x\| = d(x, E) := \inf\{\|x - z\| : z \in E\}$ .

**Πρόταση 14** (Κάθετο διάνυσμα). Έστω  $F$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο,  $E$  **πλήρης γραμμικός υπόχωρος** του  $F$ . Αν  $x \in F \setminus E$ , το πλησιέστερο προς το  $x$  στοιχείο  $y_x \in E$  είναι το μοναδικό  $y \in E$  ώστε  $x - y \perp E$ .

**Ορισμός 15.** Το μοναδικό αυτό στοιχείο  $y_x$  του  $E$  ονομάζουμε **(ορθή) προβολή** του  $x$  στον  $E$ , και το συμβολίζουμε  $P_E(x)$  ή  $P(E)x$ .

$$\forall x : x = P_E(x) + (x - P_E(x)) \text{ με } P_E(x) \perp (x - P_E(x)).$$

**Θεώρημα 16** (Υπαρξη καθέτου διανύσματος). Έστω  $H$  είναι χώρος Hilbert και  $M$  κλειστός υπόχωρος του  $H$ . Αν  $M \neq H$ , υπάρχει  $z \in H$ ,  $z \neq 0$  ώστε  $z \perp M$ .

Η πληρότητα δεν μπορεί να παραλειφθεί:

*Παράδειγμα*

Στον  $(c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  υπάρχει γνήσιος κλειστός υπόχωρος  $M$ , ώστε  $M^\perp = \{0\}$ .

$$M = \left\{ x = (x(n)) \in c_{00} : \sum \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}.$$

### Ορθογώνιες διασπάσεις

Αν  $A$  είναι μη κενό υποσύνολο του  $H$ , θέτω

$$A^\perp = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο  $A^\perp$  είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του  $H$ .

**Θεώρημα 17** (Ορθογώνια διάσπαση). Αν  $M$  είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert  $H$ , τότε

$$M \oplus M^\perp = H.$$

Δηλαδή

$$\forall y \in H \text{ γράφεται μοναδικά } y = y_M + y_\perp \text{ όπου } y_M \in M, y_\perp \in M^\perp.$$

$$\text{Πυθαγόρειο: } \|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 \quad \forall y \in H.$$

**Πόρισμα 18** (Ορθή προβολή). Έστω  $M$  κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert  $H$ .  $H$  απεικόνιση

$$P_M : H \rightarrow H : y \rightarrow y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ότι η  $P_M$  είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται (ως γνωστόν) από τις σχέσεις  $M + M^\perp = H$  και  $M \cap M^\perp = \{0\}$ . Η συνέχεια της  $P_M$  προκύπτει απ' το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\begin{aligned} \|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 &= \|y\|^2 \\ \text{άρα } \|P_M(y)\| &= \|y_M\| \leq \|y\| \end{aligned}$$

οπότε, αν  $y_n \rightarrow y$  έχουμε  $\|P_M(y_n) - P_M(y)\| = \|P_M(y_n - y)\| \leq \|y_n - y\| \rightarrow 0$ .

**Παρατήρηση - Άσκηση** Όταν  $H$  είναι χώρος Hilbert:  $A^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \text{span}(A)$  πυκνός στον  $H$ .

**Ισοδύναμα** Ένας γραμμικός υπόχωρος  $E$  ενός χώρου Hilbert  $H$  είναι πυκνός (dense) στον  $H$  αν και μόνον αν το μόνο διάνυσμα του  $H$  που είναι

## 3.2 Συνεχείς γραμμικές μορφές. Θεώρημα Riesz

### Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

**Λήμμα 19.** Έστω  $E$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν  $x \in E$ , ονομάζουμε  $f_x$  την απεικόνιση

$$f_x : E \rightarrow \mathbb{K} : y \rightarrow \langle y, x \rangle.$$

Η  $f_x$  είναι γραμμική και συνεχής.

**Παράδειγμα 20.** Στον  $E = c_{00}$ , η γραμμική μορφή

$$f : E \rightarrow \mathbb{K} : (x(1), x(2), \dots) \mapsto \sum_n \frac{1}{n} x(n)$$

δεν είναι της μορφής  $f = f_x$  με  $x \in c_{00}$ .

**Θεώρημα 21 (Riesz).** Έστω  $H$  χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή  $f : H \rightarrow \mathbb{K}$  υπάρχει μοναδικό  $x \in H$  ώστε  $f = f_x$ , δηλαδή

$$f(y) = \langle y, x \rangle \text{ για κάθε } y \in H.$$

### 3.3 Ορθοκανονικές Βάσεις. Ισομορφισμοί

#### Ορθοκανονικές Βάσεις

**Υπενθύμιση** Ένα υποσύνολο  $X$  ενός  $\mathbb{K}$ -γραμμικού χώρου  $V$  είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \neq 0$ . Ένα γραμμικά ανεξάρτητο  $X$  είναι *(αλγεβρική) βάση* του  $V$  αν η γραμμική του θήκη  $\text{span}(X)$  ισούται με  $V$ , δηλαδή αν κάθε  $v \in V$  είναι γραμμικός συνδυασμός  $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$  στοιχείων  $x_k \in X$ .

**Ορισμός 22.** Έστω  $E$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια  $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$  λέγεται *ορθοκανονική βάση* του  $E$  αν (i) είναι ορθοκανονική και (ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του  $E$ , δηλ.  $\text{span}\{e_i : i \in I\} = E$ .

**Παρατήρηση** Σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert, μια ορθοκανονική βάση *δεν είναι* αλγεβρική βάση.

#### Παραδείγματα

1. Έστω  $e_m = (\delta_m(n))$  όπου  $\delta_m(n) = 1$  όταν  $n = m$  και  $\delta_m(n) = 0$  αλλιώς. Η οικογένεια  $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$  είναι ορθοκανονική στον  $\ell^2$ . Είναι αλγεβρική βάση του  $c_{00}$ , άρα και ορθοκανονική βάση (του  $c_{00}$ ).
2. Η ίδια οικογένεια δεν είναι αλγεβρική βάση του  $\ell^2$ , γιατί  $\text{span}\{e_m : m \in \mathbb{N}\} \neq \ell^2$ . Επειδή ο υπόχωρος  $\text{span}\{e_m\} = c_{00}$  είναι πυκνός στον  $\ell^2$ , η  $\{e_m\}$  είναι ορθοκανονική βάση του  $\ell^2$ .
3. Στον χώρο  $(C([- \pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  η οικογένεια  $\{f_m : m \in \mathbb{Z}\}$  όπου  $f_m(t) = e^{imt} = \cos(mt) + i \sin(mt)$  είναι ορθοκανονική. Ο γραμμικός χώρος που παράγει είναι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, συνεπώς η  $\{f_m\}$  δεν είναι αλγεβρική βάση του  $(C([- \pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Είναι κλασικό θεώρημα στην Ανάλυση Fourier ότι κάθε  $f \in (C([- \pi, \pi]))$  προσεγγίζεται ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$  από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Συνεπώς η  $\{f_m\}$  είναι ορθοκανονική βάση του  $(C([- \pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Παρατήρηση 23.** Έστω  $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$  ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert  $H$ . Η  $\mathcal{C}$  είναι ο.κ. βάση του  $H$  αν και μόνον αν είναι *μεγιστική*, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του  $H$  (εκτός από την  $\mathcal{C}$ ), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του  $H$  που είναι κάθετο στην  $\mathcal{C}$  είναι το 0.

**Πρόταση 24.** Κάθε διαχωρίσιμος<sup>2</sup> χώρος  $E$  με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα).

Μάλιστα, αν  $F \subseteq E$  πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθοκανονική βάση του  $E$  μέσα στον  $F$  (π.χ.  $E = C([0, 1])$  και  $F = \text{πολυνύμα}$ ).

**Θεώρημα 25.** Έστω  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο  $E$  με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε  $x \in E$ ,

$$(i) \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n \quad (\text{σύγκλιση ως προς τη νόρμα του } E).$$

<sup>2</sup>Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

$$(ii) \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \text{ (Ισότητα Parseval)}.$$

**Πόρισμα 26.** Αν  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο  $E$ , για κάθε  $x, y \in E$  έχουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \langle x_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, x_n \rangle}.$$

**Θεώρημα 27** (Χαρακτηρισμοί ορθοκανονικών βάσεων). Εστω  $H$  χώρος Hilbert και  $\mathcal{E} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$  ορθοκανονικό υποσύνολο του  $H$ .

Τα ακολουθία είναι ισοδυναμία

$$1. \overline{\text{span } \mathcal{E}} = H$$

$$2. \text{ Αν } f \in H \text{ και } f \perp \mathcal{E} \text{ τότε } f = 0$$

$$3. \text{ Για κάθε } f \in H, \text{ αν } S_n(f) := \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k \text{ τότε } \lim_N \|f - S_N(f)\|_H = 0 \text{ (*)}$$

$$4. \text{ Για κάθε } f \in H, \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \text{ (ισότητα Parseval)}.$$

$$(*) \text{ (δηλ. } f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k \text{: συγκλιση στη } \|\cdot\|_H)$$

Αποδειξη στο [onbasis.pdf](#)

### Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Εστω  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο  $E$  με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε  $x \in E$ ,  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ .

Αρα η απεικόνιση  $(E, \|\cdot\|) \rightarrow (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \mapsto (\langle x, x_n \rangle)_n$  είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον  $\ell^2$ .

**Θεώρημα 28.** Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος<sup>3</sup> χώρος Hilbert  $H$  είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον  $\ell^2$ .

Ακριβέστερα, **αν επιλέξουμε** μια ορθοκανονική βάση  $\{x_n\}$  του  $H$ , η απεικόνιση

$$U : H \xrightarrow{\sim} \ell^2 : x \mapsto (\langle x, x_n \rangle)_n$$

απεικονίζει τον  $H$  (γραμμικά και) **ισομετρικά επί** τον  $\ell^2$ .

<sup>3</sup>Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον  $\ell^2(\Gamma)$  για κατάλληλο σύνολο  $\Gamma$ . (Αποδ. παραλείπεται.)

### 3.4 Η πλήρωση. Ο χώρος $L^2$

#### Η πλήρωση

**Πρόταση 29.** Αν  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση  $\phi : E \rightarrow H$  με πυκνή εικόνα.

Ο  $H$  είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν  $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώρος Hilbert και  $\psi : E \rightarrow K$  γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία  $T$  από τον  $H$  **επί** του  $K$  ώστε  $T(\phi(x)) = \psi(x)$  για κάθε  $x \in E$ . Ο χώρος Hilbert  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  λέγεται η πλήρωση του  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\phi} & \phi(E) & \hookrightarrow & H = \overline{\phi(E)} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow T \\ E & \xrightarrow{\psi} & \psi(E) & \hookrightarrow & K = \overline{\psi(E)} \end{array}$$

Η απόδειξη παραλείπεται

Ο χώρος  $L^2([a, b])$ , ο χώρος  $L^2(\mathbb{R})$

**Χωρίς Μέτρο** Θεωρώ τον  $E = (C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  όπου  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ . Ονομάζω  $L^2([a, b])$  **την πλήρωση του  $E$** .

Θεωρώ τον  $F = (C_c(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (όπου  $f \in C_c(\mathbb{R})$  σημαίνει  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής και υπάρχει  $K_f \subseteq \mathbb{R}$  συμπαγές ώστε  $f(t) = 0$  όταν  $t \notin K_f$ ). Θέτω  $\langle f, g \rangle = \int_{K_f} f(t)\overline{g(t)}dt$ . Ονομάζω  $L^2(\mathbb{R})$  **την πλήρωση του  $F$** .

Για τις ανάγκες του προπτυχιακού μαθήματος, αυτοί θα είναι οι **ορισμοί** των χώρων Hilbert  $L^2([a, b])$  και  $L^2(\mathbb{R})$ .

Ενημερωτικά παρατίθενται οι (ισοδύναμοι) ορισμοί με χρήση Θεωρίας Μέτρου.

Ο χώρος  $\mathcal{L}^2(\mu)$ , ο χώρος  $L^2(\mu)$

**Με Μέτρο (Μέτρον Άριστον)** Έστω  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  χώρος μέτρου (π.χ.  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ ).

**Ορισμός 30.** Ο χώρος  $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$  αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  (ή  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν  $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$ . Ο αριθμός  $\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$  **συμβολίζεται  $\|f\|_2$** .

Θέτω  $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$ .

Αν  $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ , έχω  $f = g$   $\mu$ -σχ. παντού  $\iff f - g \in \mathcal{N}$ .

Επίσης, ο  $\mathcal{N}$  είναι γραμμικός υπόχωρος του  $\mathcal{L}^2$ .

Θέτω  $\|f + \mathcal{N}\|_2 := \|f\|_2$ . Είναι καλά ορισμένη **νόρμα** στον χώρο πηλίκο  $L^2(\mu) := \mathcal{L}^2(\mu)/\mathcal{N}$ .

Έπεται ότι ο  $L^2(\mu)$  αποτελείται από τις **κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων** του  $\mathcal{L}^2(\mu)$  modulo ισότητα  $\mu$ -σχ. παντού.

**Ο χώρος  $L^2([a, b])$ , ο χώρος  $L^2(\mathbb{R})$**

**Θεώρημα (Riesz–Fisher)** Ο  $L^2(\mu)$  είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η  $\|\cdot\|_2$  προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο  $\langle f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N} \rangle = \int_X f(t) \overline{g(t)} d\mu(t)$ ).

**Θεώρημα** (πόρισμα π.χ. του Θ. Luzin) Ο  $C([a, b])$  είναι πυκνός στον  $L^2([a, b], \mathcal{B}, m)$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$ , βεβαίως.

Ο  $C_c(\mathbb{R})$  είναι πυκνός στον  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$ .

### Συμπερασματικά: Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος σε κλειστό υπόχωρο.

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικής βάσης  $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ . (Άρα ισομορφισμός με  $\ell^2(\Gamma)$ )

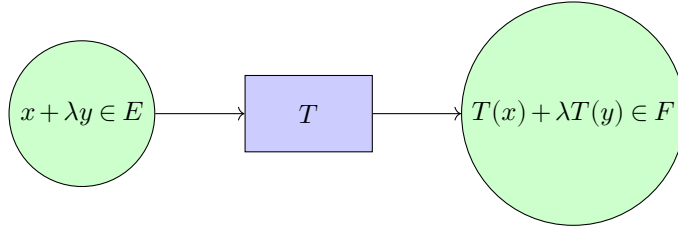
**Συμβολισμός:**  $\ell^2[n] = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ .

Όποιος ενδιαφέρεται για τον  $\ell^2(\Gamma)$  (για τυχόν  $\Gamma$ ) ας δει το αρχείο [nonsep.pdf](#).

## 4 Φραγμένοι τελεστές

### 4.1 Γραμμικοί τελεστές και πίνακες

**Ορισμός 31.** Αν  $E, F$  είναι γραμμικοί χώροι, ονομάζουμε  $\mathcal{L}(E, F)$  το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων  $T : E \rightarrow F$ . Όταν  $E = F$ , γράφουμε  $\mathcal{L}(E)$  αντί για  $\mathcal{L}(E, E)$ .

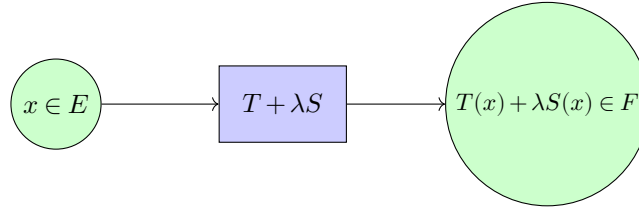


**Ο γραμμικός χώρος  $\mathcal{L}(E, F)$**

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S)(x) = T(x) + \lambda S(x) \quad (x \in E)$$

το σύνολο  $\mathcal{L}(E, F)$  γίνεται γραμμικός χώρος.



**Πίνακες και Τελεστές**

- Κάθε  $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$  ορίζει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση  $T_A : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n : \xi \mapsto T_A(\xi)$  μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων, ως εξής

$$T_A(\xi) = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} \xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} \xi_j \end{bmatrix}.$$

- Αν  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε επιλογή ορθοκανονικών βάσεων  $\{e_1, \dots, e_m\}$  του  $E$  και  $\{f_1, \dots, f_n\}$  του  $F$  ορίζει ισομορφισμούς  $V : E \rightarrow \mathbb{K}^m, W : F \rightarrow \mathbb{K}^n$ , οπότε ο πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$  ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$$\tilde{T}_A : E \xrightarrow{V} \mathbb{K}^m \xrightarrow{T_A} \mathbb{K}^n \xrightarrow{W^{-1}} F.$$

Παρατηρούμε ότι

$$a_{ik} = \langle \tilde{T}_A e_k, f_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m.$$

- Αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  ορίζει έναν  $n \times m$  πίνακα  $A_T = [a_{ik}]$  από την σχέση  $a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle$ .

Η απεικόνιση  $M_{nm}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E, F) : A \mapsto \tilde{T}_A$  είναι 1-1, επί, γραμμική:

**Πρόταση 32.** Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις  $\{e_1, \dots, e_m\}$  του  $E$  και  $\{f_1, \dots, f_n\}$  του  $F$ , η απεικόνιση  $T \rightarrow \langle Te_k, f_i \rangle$  είναι γραμμικός ισομορφισμός από τον χώρο  $\mathcal{L}(E, F)$  επί του γραμ. χώρου  $M_{nm}(\mathbb{K})$ .

Όταν  $n = m$ , απεικονίζει τη σύνθεση τελεστών στο γινόμενο πινάκων (ή γενικό-τερα όταν ορίζεται η σύνθεση).

**Σύνθεση  $\leadsto$  γινόμενο πινάκων:** Αν επίσης ένας χώρος  $G$  έχει ορθοκανονική βάση  $\{g_1, \dots, g_k\}$ , και  $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$  είναι γραμμικές με  $T \leadsto [a_{ij}] \in M_{nm}$  και  $S \leadsto [b_{ij}] \in M_{mk}$  τότε  $ST := S \circ T \leadsto [c_{ij}] \in M_{nk}$  όπου  $c_{ij} = \sum_r a_{ir} b_{rj}$ .

Αν  $A \in M_{nm}$ , ορίζουμε  $A^t \in M_{mn}$  τον  $A^t = [b_{ij}]$  όπου  $b_{ij} = a_{ji}$ . Θέτουμε  $A^* = [\overline{a_{ji}}]$ . Τότε  $\langle \tilde{T}_{A^*} y, x \rangle = \langle y, \tilde{T}_A x \rangle$  για κάθε  $y \in F, x \in E$ .

Συνεπώς:

#### Παρατήρηση

Αν  $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle), (H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο **πεπερασμένης διάστασης**, και  $T : H_1 \rightarrow H_2$  ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \quad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

**Ιδέα της απόδειξης:** Επιλέγουμε ορθοκανονικές βάσεις και θεωρούμε τον πίνακα  $A := A_T$ . Αν  $B$  είναι ο πίνακας  $B = A^*$ , ο τελεστής  $T^* := \tilde{T}_B$  ικανοποιεί την σχέση  $\langle T^* x_2, x_1 \rangle = \langle x_2, T x_1 \rangle$  για κάθε  $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$ .

**Ιδιότητες:** Αν  $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), R \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ , έχουμε

$$(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*, \quad (RT)^* = T^* R^*, \quad T^{**} = T.$$

## 4.2 Φραγμένοι τελεστές

Έστω  $(E, \|\cdot\|_E)$  και  $(F, \|\cdot\|_F)$  χώροι με νόρμα.

*Παρατήρηση.* Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια **σε όλον το χώρο**.

**Ορισμός 33.** Μία γραμμική απεικόνιση  $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  λέγεται **φραγμένη** ή **φραγμένος τελεστής (bounded operator)** αν (είναι φραγμένη στην  $\text{ball}(E)$ , δηλ.)

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$
... ισοδύναμα, αν υπάρχει  $M$  ώστε **για κάθε  $x \in E$**  να ισχύει  $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ .

$$\|Tx - Tx'\|_F \stackrel{\gamma\rho.}{=} \|T(x - x')\|_F \stackrel{\varphi\rho.}{\leq} \|T\| \|x - x'\|_E$$

Αν  $T$  γραμμική,

φραγμένη  $\iff$  συνεχής  $\iff$  ομοιόμορφα συνεχής.

$\mathcal{B}(E, F)$ : ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

**Πρόταση 34.** Έστω  $(E, \|\cdot\|_E)$  χώρος με νόρμα,  $(F, \|\cdot\|_F)$  χώρος Banach,  $D \subseteq E$  πυκνός γραμμικός υπόχωρος και

$$T : D \rightarrow F$$

γραμμική απεικόνιση.

**Αν η  $T$  είναι συνεχής, τότε** (και μόνο τότε) **δέχεται συνεχή επέκταση**

$$\tilde{T} : E \rightarrow F \quad \text{δηλ.} \quad \tilde{T}|_D = T.$$

Η επέκταση  $\tilde{T}$  είναι μοναδική (αν υπάρχει) και  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .

### Παράδειγμα - Άσκηση

$$D = c_{oo} \subseteq \ell^2, \quad F = \ell^2$$

Αν  $a = (a_n)$  με κάθε  $a_n \in \mathbb{K}$ , ορίζω

$$T : e_n \mapsto a_n e_n \quad n \in \mathbb{N}$$

και επεκτείνω γραμμικά:

$$T \left( \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n \right) := \sum_n \langle x, e_n \rangle a_n e_n$$

δηλ.  $T((x(n))) := (a_n x(n)), \quad x = (x(n)) \in c_{oo}.$

Επεκτείνεται σε  $\tilde{T} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  αν-ν η  $(a_n)$  είναι φραγμένη, και

$$\|T\| = \sup_n |a_n|.$$

Μάλιστα αν η  $(a_n)$  δεν είναι φραγμένη, υπάρχει  $y = (y(n)) \in \ell^2$  ώστε  $(a_n y(n)) \notin \ell^2$ .

**Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης**

Αν  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και ο  $E$  έχει πεπερασμένη διάσταση, κάθε γραμμική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  είναι συνεχής.

Πράγματι, επιλέγοντας ορθοκανονική βάση  $\{e_1, \dots, e_m\}$  του  $E$  βρίσκουμε

$$\|Tx\|_F \leq \left( \sum_{k=1}^m \|Te_k\|_F^2 \right)^{1/2} \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Όμως, αν ο  $E$  έχει άπειρη διάσταση, υπάρχουν ασυνεχείς γραμμικές απεικονίσεις  $T : E \rightarrow F$ , ακόμα κι αν  $\dim F = 1$ .

### 4.3 Ο συζυγής τελεστής

#### Ο συζυγής τελεστής

**Θεώρημα 35.** Αν  $H_1, H_2$  είναι δύο χώροι *Hilbert* και  $T : H_1 \rightarrow H_2$  ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^*y, x \rangle_{H_1} = \langle y, Tx \rangle_{H_2} \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  ονομάζεται *ο συζυγής (adjoint) του  $T$* . Είναι φραγμένος τελεστής και  $\|T^*\| = \|T\|$ .

**Προειδοποίηση** Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

**Σχόλιο** Αποδεικνύουμε σ' αυτό το σημείο μόνον την *μοναδικότητα* του συζυγούς τελεστή, καθώς στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν ο συζυγής τελεστής κατασκευάζεται «με το χέρι». Αργότερα (δες Θεώρημα 45) θα δείξουμε την *ύπαρξη* στη γενική περίπτωση.

#### Ο συζυγής τελεστής

**Πρόταση 36.** Η απεικόνιση  $T \rightarrow T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \rightarrow \mathcal{B}(H_2, H_1)$  έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή  $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$ .

(β)  $T^{**} = T$ .

(γ)  $\|T^*\| = \|T\|$ .

(δ) Αν  $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$  φραγμένοι τελεστές,  $(TS)^* = S^*T^*$ .

(ε)  $\|T^*T\| = \|T\|^2$ .

Ειδικότερα (αν  $H_1 = H_2 = H$ ), η  $T \rightarrow T^* : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  είναι μια *ενέλιξη (involution)* που ικανοποιεί την λεγόμενη *ιδιότητα  $C^*$* , δηλ. την (ε).

#### 4.4 Παραδείγματα

Παραδείγματα που έχουμε ήδη συναντήσει:

- Η προβολή σε έναν υποχώρο: Πορίσμα 18.

Παραδειγμα:  $f \mapsto S_N(f)$ : Λήμμα 11.

- Ένας ισομορφισμός με τον  $\ell^2$ : Θεώρημα 28.

Παραδειγμα: Ο μετασχηματισμός Fourier

$$L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}.$$

- Αν  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο **πεπερασμένης διάστασης**, κάθε γραμμική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  είναι συνεχής. **Αν επιλέξω** ορθοκανονικές βάσεις  $\{e_1, \dots, e_m\}$  του  $E$  και  $\{f_1, \dots, f_n\}$  του  $F$ , ορίζεται ένας  $n \times m$  πίνακας  $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$  από τη σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m.$$

Αντίστροφα, κάθε  $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$  ορίζει μια μοναδική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

- Γενικότερα, κάθε **φραγμένος** τελεστής  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  ορίζει έναν  $\infty \times \infty$  πίνακα  $[\langle Te_k, e_i \rangle]$ , όπου  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του  $\ell^2$ . Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. **Παράδειγμα**;

- **Διαγώνιοι τελεστές** Αν  $a = (a_n)$ ,  $a_n \in \mathbb{K}$  είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση  $(x(n)) \rightarrow (a_n x(n))$  στέλνει τον  $\ell^2$  στον  $\ell^2$  αν-ν  $(a_n) \in \ell^\infty$  και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή  $D_a$  με νόρμα  $\|D_a\| = \|a\|_\infty$ . Έχουμε  $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$  (διαγώνιος πίνακας). Ο συζυγής του τελεστή  $D_a$  είναι ο  $D_b$ , όπου  $b = a^*$  (δηλαδή  $b(n) = \overline{a(n)}$  για κάθε  $n$ ).

- **Τελεστές Hilbert-Schmidt** Μία ικανή (αλλά **όχι αναγκαία**) συνθήκη ώστε ένας  $\infty \times \infty$  πίνακας  $[a_{ik}]$  να ορίζει φραγμένο τελεστή  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  ώστε  $a_{ik} = \langle Te_k, e_i \rangle$  για κάθε  $i, k \in \mathbb{N}$  είναι η  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$  (**σύγκρινε με τους διαγώνιους**). Έχουμε

$$(Tx)(i) = \langle Tx, e_i \rangle = \sum_k a_{ik} x(k) \text{ για κάθε } x \in \ell^2.$$

- **Ολοκληρωτικοί τελεστές στον  $L^2([a, b])$** . Αν  $k \in C([a, b] \times [a, b])$ , ορίζουμε

$$(T_k^o f)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \quad f \in C([a, b]).$$

Ορίζει γραμμικό τελεστή  $T_k^o : (C([a, b]), \|\cdot\|_2) \rightarrow (C([a, b]), \|\cdot\|_2)$  φραγμένο, με  $\|T_k^o\|^2 \leq \iint |k(x, y)|^2 dx dy$ .

Αρα επεκτείνεται σε  $T_k : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$ .

- **Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον  $L^2([a, b])$ .** Αν  $f \in C([a, b])$ , ορίζουμε

$$M_f^o : C([a, b]) \rightarrow C([a, b]) : g \rightarrow fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή  $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$ , ο  $M_f^o$  επεκτείνεται σε

$M_f : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$  με  $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$  (μάλιστα, ισότητα).

(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε  $f \in L^\infty(\mu)$  και όρισε  $M_f : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu) : g \rightarrow fg$ .

Είναι καλά ορισμένος και  $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$  (ισότητα για  $\sigma$ -πεπερασμένο  $\mu$ ).

Ο συζυγής του τελεστή  $M_f$  είναι ο τελεστής  $M_g$  όπου  $g = f^*$ . Δηλαδή  $M_f^* = M_{f^*}$ .

- **Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον**

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}:$$

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω  $U, V$ :

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$

$$Vx = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή  $(Ux)(n) = x(n-1)$  και  $(Vx)(n) = x(n+1)$  για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$ .

Προφανώς  $U, V : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ , γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι  $UV = VU = I$ , δηλ.  $U^{-1} = V$ .

Ο συζυγής του  $U$  είναι ο  $V$ . Άρα  $UU^* = U^*U = I$ .

- **Τελεστές μετατόπισης (α) Στον  $\ell^2(\mathbb{Z})$  (αλλιώς):**

$$Ue_n := e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά})$$

$$\text{και } Ve_n := e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Επεκτείνω γραμμικά στον  $c_{00}(\mathbb{Z})$ , παρατηρώ ότι είναι  $\|\cdot\|_2$ -ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες  $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ . Δείχνουμε ότι  $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$  για κάθε  $n, m \in \mathbb{Z}$ , άρα  $V = U^*$  (γιατί;).

- **(β) Στον  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ :**

$$Se_n := e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\text{και } Te_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά})$$

Επεκτείνω γραμμικά στον  $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$ , παρατηρώ ότι είναι  $\|\cdot\|_2$ -συστολές (δηλ.  $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$  για κάθε  $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$ ), άρα επεκτείνονται σε συστολές  $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ . Δείχνω  $T = S^*$ .

(Μάλιστα ο  $S$  είναι ισομετρία. Ο  $S^*$ ;) Συμπέρασμα

$$\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}) : Ue_n = e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά})$$

$$U^*e_n = e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}_+) : Se_n = e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$S^*e_n = \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά})$$

• (γ) Στον  $L^2(\mathbb{R})$  (translation operators):

Έστω  $t \in \mathbb{R}$ . Αν  $f \in C_c(\mathbb{R})$ , ορίζω  $f_t : s \rightarrow f_t(s) = f(s-t)$ . Τότε  $f_t \in C_c(\mathbb{R})$  και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \rightarrow C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2 : f \rightarrow f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί:). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ , επί.

**Μη Φραγμένοι τελεστές: Ένα παράδειγμα**

Στον χώρο  $C^1([0, 1])$  των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων <sup>4</sup> ορίζουμε  $Df = f'$ . Είναι γραμμική απεικόνιση, καλά ορισμένη στον πυκνό υπόχωρο  $C^1([0, 1])$  του  $L^2([0, 1])$ , αλλά δεν επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή  $L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ , γιατί δεν είναι συνεχής ως προς τη νόρμα του  $L^2([0, 1])$ : δεν υπάρχει σταθερά  $M < \infty$  ώστε  $\|Df\|_2 \leq M \|f\|_2$  για κάθε  $f \in C^1([0, 1])$ .

---

<sup>4</sup>Δηλ. των  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  που έχουν παράγωγο  $f'(x)$ ,  $\forall x \in [0, 1]$  (στα άκρα οι πλευρικές) και η  $f' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$ .

## 4.5 Ο Χώρος των Τελεστών

**Ορισμός 37.** Αν  $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$  είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε  $\mathcal{B}(E, F)$  το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (F, \|\cdot\|).$$

Όταν  $E = F$ , γράφουμε  $\mathcal{B}(E)$  αντί για  $\mathcal{B}(E, E)$ .

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S) : x \rightarrow Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο  $\mathcal{B}(E, F)$  γίνεται γραμμικός χώρος.

$$\text{Υπενθυμιση: } \|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

**Πρόταση 38.** Η απεικόνιση  $T \rightarrow \|T\|$  είναι νόρμα στον χώρο  $\mathcal{B}(E, F)$ .

Αν επί πλέον ο  $F$  είναι πλήρης, ο  $\mathcal{B}(E, F)$  είναι χώρος Banach.

Όταν  $E = F$ , ο  $\mathcal{B}(E)$  γίνεται (μη μεταθετική, αν  $\dim E > 1$ ) άλγεβρα ως προς τη σύνθεση:  $(TS)(x) = T(S(x))$  ( $x \in E$ ).<sup>5</sup> Μάλιστα  $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$ .

**Ορισμός 39.** Ο (τοπολογικός) δυικός (dual)  $E^*$  ενός χώρου με νόρμα είναι ο χώρος όλων των συνεχών γραμμικών μορφών  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ , δηλαδή ο  $\mathcal{B}(E, \mathbb{K})$ . Είναι πάντα χώρος Banach.

Αν  $H$  είναι χώρος Hilbert και για κάθε  $x \in H$  ορίσουμε  $f_x : H \rightarrow \mathbb{K} : y \mapsto \langle y, x \rangle$ , η απεικόνιση

$$H \rightarrow H^* : x \rightarrow f_x$$

είναι αντιγραμμική ισομετρία. Το θεώρημα Riesz λέει ότι είναι επί του  $H^*$ .

### Sesquilinear μορφές

**Ορισμός 40.** Μια απεικόνιση  $\phi : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$  λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες

(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε  $y \in H_2$  η απεικόνιση  $x \rightarrow \phi(x, y) : H_1 \rightarrow \mathbb{C}$  είναι γραμμική.

(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε  $x \in H_1$  η απεικόνιση  $y \rightarrow \phi(x, y) : H_2 \rightarrow \mathbb{C}$  είναι γραμμική.

Μια sesquilinear μορφή λέγεται φραγμένη, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα

$$(iii) \sup\{|\phi(x, y)| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\} := \|\phi\| < +\infty.$$

**Παράδειγμα**  $\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle$  όπου  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ .

Μάλιστα  $\|T\| = \|\phi\|$ , δηλαδή

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\}.$$

<sup>5</sup>δηλ. δακτυλιος και γραμμ. χωρος με  $\lambda(TS) = (\lambda T)S = T(\lambda S)$ ,  $T, S \in \mathcal{B}(E)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**Η νόρμα τελεστή: Άσκηση**

Αν  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y \rangle_2| : x \in \text{ball}(H_1), y \in \text{ball}(H_2)\}\end{aligned}$$

Αν  $\dim H_1 = m, \dim H_2 = n$  με ΟΚ βάσεις  $\{e_1, \dots, e_m\}$  και  $\{f_1, \dots, f_n\}$  και  $a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$  έχουμε

$$\|T\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j \right| : \sum_{j=1}^m |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \leq 1 \right\}$$

**Sesquilinear μορφές και τελεστές**

**Ταντότητα πολικότητας (polarization)** Αν  $\varphi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  sesquilinear και  $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x, x)$  η αντίστοιχη **τετραγωνική μορφή**,

$$\varphi(x, y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

**Πρόταση 41.** Έστω  $H$  **μυγαδικός** χώρος Hilbert. Μια sesquilinear μορφή  $\varphi$  είναι φραγμένη αν και μόνον αν η  $\hat{\varphi}$  είναι φραγμένη στη μπάλα του  $H$ . Μάλιστα

$$\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball}(H)\} \leq \|\varphi\| \leq 2 \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

Αν  $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$  για κάθε  $x \in H$ , τότε <sup>6</sup> ισχύει η ισότητα  $\|\varphi\| = \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball}(H)\}$ .

**Πόρισμα 42.** Έστω  $H$  **μυγαδικός** χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση  $T : H \rightarrow H$  είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \text{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2 \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

Επίσης, αν  $T, S \in \mathcal{B}(H)$ , τότε  $T = S$  αν και μόνον αν  $\langle Tx, x \rangle = \langle Sx, x \rangle$  για κάθε  $x \in H$ .

**Πόρισμα 43.** Έστω  $H$  **μυγαδικός** χώρος Hilbert και  $T : H \rightarrow H$  φραγμένη γραμμική απεικόνιση. Αν  $T = T^*$ , τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

**Θεώρημα 44.** Έστω  $H_1, H_2$  χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή  $\phi : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$  ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  από την σχέση

$$\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Έπεται το

---

<sup>6</sup>... αλλά όχι εν γένει

**Θεώρημα 45.** Αν  $H_1, H_2$  είναι δύο χώροι Hilbert και  $T : H_1 \rightarrow H_2$  ένας φραγμένος τελεστής, τότε *υπάρχει* ένας μοναδικός τελεστής  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1} \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο  $T^*$  είναι φραγμένος και  $\|T^*\| = \|T\|$ .

*Αποδ.* Η  $\phi(y, x) := \langle y, Tx \rangle_{H_2}$  είναι sesquilinear και φραγμένη.

## 5 Κατηγορίες τελεστών

### 5.1 Τελεστές φυσιολογικοί, αυτοσυζυγείς, unitary

**Ορισμός 46.** Έστω  $H_1, H_2$  χώροι Hilbert.

- (i) Ένας  $T \in \mathcal{B}(H_1)$  λέγεται **φυσιολογικός (normal)** αν  $T^*T = TT^*$ .
- (ii) Ένας  $T \in \mathcal{B}(H_1)$  λέγεται **αυτοσυζυγής (self-adjoint)** αν  $T = T^*$ .
- (iii) Ένας  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  λέγεται **ορθομοναδιαίος (unitary)** αν  $T^*T = I_{H_1}$  και  $TT^* = I_{H_2}$ .

**Παραδείγματα:**

Ο (unilateral) shift  $S$  στον  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$  δεν είναι φυσιολογικός.

Κάθε  $M_f$  είναι φυσιολογικός.

Ένας  $M_f$  είναι αυτοσυζυγής αν-ν  $f(t) \in \mathbb{R}$  για κάθε  $t$ .

Ο μετασχηματισμός Fourier  $F : L^2([0, 2\pi]) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  είναι ορθομοναδιαίος.

**Πρόταση 47.** Έστω  $T \in \mathcal{B}(H)$ , όπου  $H$  μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο  $T$  είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν  $\|Tx\| = \|T^*x\|$  για κάθε  $x \in H$ .

**Πρόταση 48.** Έστω  $T \in \mathcal{B}(H)$ , όπου  $H$  μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο  $T$  είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν  $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$  για κάθε  $x \in H$ .

**Πρόταση 49.** Έστω  $T \in \mathcal{B}(H)$ , όπου  $H$  μιγαδικός χώρος Hilbert. Αν ο  $T$  είναι αυτοσυζυγής, τότε  $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}$ .

**Πρόταση 50.** Έστω  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ , όπου  $H_i$  μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε

- (i) Ο  $T$  είναι ισομετρία αν και μόνον αν  $T^*T = I_{H_1}$ , ισοδύναμα αν και μόνον αν  $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$  για κάθε  $x, y \in H_1$ .
- (ii) Ο  $T$  είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.

**Παραδείγματα**

Αν  $H_1 = H_2 = H$  με  $\dim H < \infty$ , κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.

Στον  $\ell^2$ , ο  $S : e_n \rightarrow e_{n+1}$  είναι ισομετρία, όχι επί αφού  $e_0 \notin S(\ell^2)$  (στο ξενοδοχείο Hilbert πάντα βρίσκουμε δωμάτιο, ακόμα κι αν σε κάθε  $e_n$  υπάρχει ένοικος).

## 5.2 Θετικοί τελεστές

### Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε  $A \in \mathcal{B}(H)$  γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_k = A_k^* \ (k = 1, 2).$$

**Ορισμός 51.** (i) Ένας αυτοσυζυγής τελεστής  $T \in \mathcal{B}(H)$  λέγεται **θετικός** (ή θετικά ημισορισμένος) (positive ή positive semidefinite) αν  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$  για κάθε  $x \in H$ . Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε  $\mathcal{B}_+(H)$ .

(ii) Αν  $T, S \in \mathcal{B}_h(H)$ , ορίζουμε  $T \geq S$  αν  $\langle Tx, x \rangle \geq \langle Sx, x \rangle$  για κάθε  $x \in H$ , αν δηλαδή  $T - S \in \mathcal{B}_+(H)$ .

**Παρατήρηση:** Σε μιγαδικούς χώρους, κάθε  $T \in \mathcal{B}(H)$  με  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$  για κάθε  $x \in H$  είναι αυτομάτως θετικός.

### Ο κώνος των θετικών τελεστών

Γράφω  $\mathcal{B}_h(H) = \{T \in \mathcal{B}(H), T = T^*\}$ .

Ο  $(\mathcal{B}_h(H), \|\cdot\|)$  είναι  $\mathbb{R}$ -χώρος Banach. Ο  $\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H)$  είναι

- κώνος:  $A \geq 0, t \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow tA \geq 0$ .
- κυρτός:  $A, B \geq 0, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda A + (1 - \lambda)B \geq 0$
- γνήσιος:  $A \geq 0$  και  $-A \geq 0 \Rightarrow A = 0$ .
- παράγει τον  $\mathcal{B}_h(H)$  (full cone):  $\forall T \in \mathcal{B}_h(H) \exists A, B \geq 0 : T = A - B$ .
- $\|\cdot\|$ -κλειστός.

### Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Με άλλα λόγια:

Η διάταξη  $\geq$  στον  $\mathcal{B}_h(H)$  είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν  $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ )

$$A \geq B, S \geq T \Rightarrow A + S \geq B + T$$

$$\text{και } \lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A \geq \mu B.$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν  $A \geq 0$  και  $B \geq 0$  τότε  $AB \geq 0$ .

Επίσης, αν  $T_n \geq 0$  και  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ , τότε ο  $T$  είναι θετικός.

$$\text{Αν } A = A^* \text{ τότε } -\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$$

$$\text{άρα } A = (A + \|A\|I) - \|A\|I \quad (\text{διαφορά δύο θετικών})$$

### 5.3 Τετραγωνική ρίζα - Πολική αναπαράσταση

#### Υπαρξη τετραγωνικής ρίζας

**Πρόταση 52.** Για κάθε θετικό τελεστή  $A \in \mathcal{B}(H)$  υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής  $X \in \mathcal{B}(H)$  ώστε  $X^2 = A$ . Ο τελεστής αυτός λέγεται **τετραγωνική ρίζα** του  $A$  και συμβολίζεται  $A^{1/2}$ . Ο  $A^{1/2}$  μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον  $A$ .

**Αποδείξη:** Παραλείπεται

**Πόρισμα 53.** Αν  $A, B \in \mathcal{B}(H)$  είναι θετικοί τελεστές, τότε ο  $AB$  είναι θετικός αν και μόνον αν  $AB = BA$ .

#### Πολική αναπαράσταση τελεστή

**Ορισμός 54.** Έστω  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ . Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή  $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$  συμβολίζεται  $|T|$ .

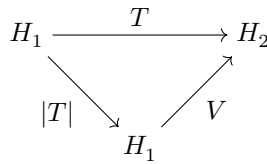
**Ορισμός 55.** Ένας τελεστής  $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  λέγεται **μερική ισομετρία** (partial isometry) αν ο περιορισμός της  $V$  στον υπόχωρο  $M = (\ker V)^\perp$  είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος  $M$  λέγεται **αρχικός χώρος** και ο υπόχωρος  $V(M)$  (ο οποίος είναι κλειστός - γιατί;) λέγεται **τελικός χώρος** της  $V$ .

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός  $z$  έχει μοναδική πολική αναπαράσταση  $z = u|z|$ , όπου  $|z| > 0$  και  $|u| = 1$ .

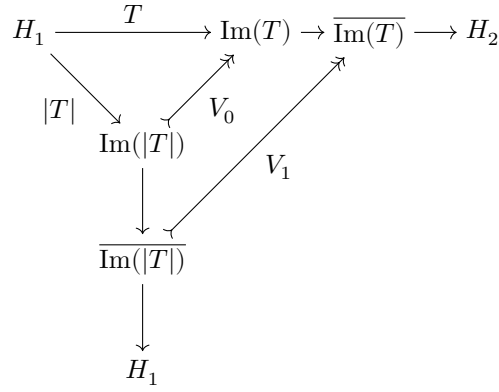
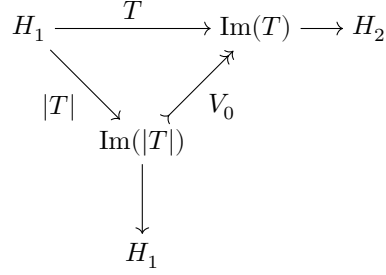
Θα δείξουμε ότι ένας αυθαίρετος τελεστής σε έναν χώρο Hilbert δέχεται μία «πολική αναπαράσταση».

**Πρόταση 56** (πολική αναπαράσταση: polar decomposition). Έστω  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία  $V$  με αρχικό χώρο  $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$  και τελικό χώρο  $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$  ώστε

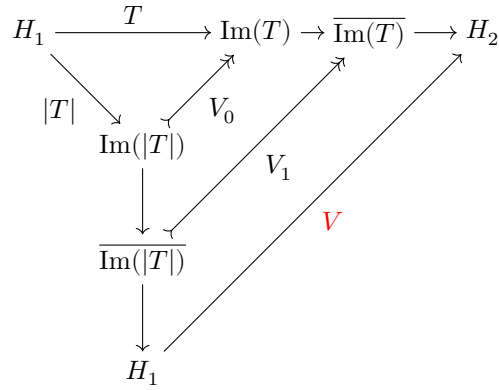
$$T = V|T|.$$



**Ιδέα της απόδειξης** Παρατηρείς ότι  $\|Tx\| = \||T|x\|$  για κάθε  $x \in H_1$ , οπότε μπορείς να ορίσεις  $V_0 : |T|x \rightarrow Tx$  και να επεκτείνεις:  $\leadsto$



**Πρόταση 57.** Έστω  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  ανθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μοναδικός unitary τελεστής  $V_1 : \overline{\text{Im}(|T|)} \rightarrow \overline{\text{Im}(T)}$  ώστε  $T = V_1|T|$ .



## 5.4 Προβολές

**Παρατήρηση** Αν  $P : H \rightarrow H$  γραμμική με  $P = P^2$ , τότε

$$\begin{aligned} \operatorname{im} P &= \{x \in H : x = Px\}, \quad \ker P = \operatorname{im}(I - P) \\ H &= \operatorname{im} P + \ker P, \quad \operatorname{im} P \cap \ker P = \{0\}. \end{aligned}$$

Έστω  $M$  κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert  $H$ .

$$H = M \oplus M^\perp : \quad x = x_M + x_{M^\perp}$$

Η **ορθή προβολή επί του  $M$** :  $P_M : H \rightarrow H : x \rightarrow x_M$  είναι γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ.  $P^2 = P$ ) με  $\|P\| \leq 1$ .

**Πρόταση 58.** Έστω  $H$  χώρος Hilbert και  $P : H \rightarrow H$  γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ.  $P^2 = P$ ). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (α) Υπάρχει κλειστός υπόχωρος  $M$  του  $H$  ώστε  $P = P_M$ .
- (β)  $(\ker P)^\perp = (\operatorname{im} P)$ .
- (γ)  $\|P\| \leq 1$ .

**Πρόταση 59.** Έστω  $H$  χώρος Hilbert και  $P \in \mathcal{B}(H)$  ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο  $P$  είναι η ορθή προβολή επί του  $\operatorname{im} P$ .
- (ii) Ο  $P$  είναι αυτοσυζυγής, μάλιστα είναι θετικός.
- (iii) Ο  $P$  είναι φυσιολογικός.

Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής.

### Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- (α) Αν  $P \in \mathcal{B}(H)$ , τότε:  $P$  ορθή προβολή  $\iff P = P^* = P^2$ .
- (β) Αν  $P = P^2$ , τότε (α)  $x \in \operatorname{im} P \iff x = Px$  και  
(β)  $x \in \ker P \iff x \in \operatorname{im}(I - P)$ .
- (γ) Αν  $P$  ορθή προβολή, τότε (ι)  $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$  για κάθε  $x \in H$  και  
(ιι)  $Px = x \iff \|Px\| = \|x\|$ .

**Πρόταση 60** (Η απεικόνιση  $P \rightarrow \operatorname{im} P$  διατηρεί τη διάταξη). Αν  $P, Q$  είναι ορθές προβολές, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α)  $P \leq Q$       (β)  $\|Px\| \leq \|Qx\|$  για κάθε  $x \in H$
- (γ)  $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$       (δ)  $QP = P$       (ε)  $PQ = P$ .

**Πρόταση 61.** Αν  $M, N$  είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert  $H$  και  $P = P(M)$ ,  $Q = P(N)$  είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε

(i) Ο τελεστής  $R = PQ$  είναι προβολή αν και μόνον αν  $PQ = QP$ , αν-ν  $P(N) \subseteq N$ , αν-ν  $Q(M) \subseteq M$ . Τότε  $R = P(M \cap N)$ .

(ii)  $M \perp N \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P|_N = 0 \iff Q|_M = 0$ .

(iii) Ο τελεστής  $S = P + Q$  είναι προβολή αν και μόνον αν  $M \perp N$ . Τότε  $S = P(M + N)$ .

(iv) Ο τελεστής  $D = P - Q$  είναι προβολή αν και μόνον αν  $M \supseteq N$ . Τότε  $D = P(M \cap N^\perp)$ .

**Πρόταση 62.** Αν  $P = P(M)$  και  $Q = P(N)$ , όπου  $M, N$  κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert  $H$  και  $L = M \cap N$ , τότε:

Οι προβολές  $P$  και  $Q$  μετατίθενται αν και μόνον αν οι υπόχωροι  $M \cap L^\perp$  και  $N \cap L^\perp$  είναι κάθετοι.

### Ένα Παράδειγμα

Εστω  $\theta \in (0, \pi/2)$  και  $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$ . Αν ορίσουμε

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q := \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Οι  $P$  και  $Q$  είναι ορθές προβολές στον χώρο  $\ell_2^2$ , οι υποχώροι  $\text{im } P$  και  $\text{im } Q$  έχουν τετριμενή τομή αλλά δεν είναι κάθετοι. Το γινόμενο  $PQ$  δεν είναι προβολή.

Αν  $(\theta_n)$  είναι μηδενική ακολουθία στο  $(0, \pi/2)$  ορίζω τους τελεστές  $C, S \in \mathcal{B}(\ell^2)$  από τις σχέσεις  $Ce_n = (\cos \theta_n)e_n$ ,  $Se_n = (\sin \theta_n)e_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Τότε οι τελεστές

$$P := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q := \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix}$$

είναι καλά ορισμένες ορθές προβολές στον χώρο  $\ell^2 \oplus \ell^2$ , οι υποχώροι  $\text{im } P$  και  $\text{im } Q$  έχουν τετριμενή τομή, όμως (οχι μόνον δεν είναι κάθετοι αλλά) το άθροισμά τους δεν είναι κλειστός υποχώρος.

Εδώ  $H_1 \oplus H_2$  είναι ο χώρος όλων των ζευγαριών  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  όπου  $x \in H_1, y \in H_2$  με πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle := \langle x, u \rangle_{H_1} + \langle y, v \rangle_{H_2}.$$

### Συμβολισμοί

Αν  $M, N$  είναι κλειστοί υπόχωροι του  $H$ , ο  $M \cap N$  είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του  $H$  που περιέχεται και στον  $M$  και στον  $N$ .

Ο  $\overline{M + N}$  είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του  $H$  που περιέχει και τον  $M$  και τον  $N$ .

$$\begin{aligned} \text{Συμβολισμοί: } P \vee Q &:= P(M \vee N) = P(\overline{M + N}) \\ P \wedge Q &:= P(M \wedge N) = P(M \cap N). \end{aligned}$$

### Ακολουθίες Προβολών

**Πρόταση 63.** Αν  $(Q_i)$  είναι φθίνουσα [αύξουσα] ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο <sup>7</sup> στην προβολή  $Q = P(M)$ , όπου  $M$  είναι η τομή [η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης] των  $\text{im } Q_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ).

**Πρόταση 64.** Έστω  $(P_n)$  ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert  $H$ .

(i) Αν οι  $P_n$  είναι ανά δύο κάθετες, τότε η σειρά  $\sum_n P_n x$  συγκλίνει για κάθε  $x \in H$ , και  $\sum_n P_n x = P(M)x$ , όπου  $M$  είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των  $\text{im } P_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Για κάθε  $x \in H$  ισχύει  $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$ .

(ii) Αν  $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$  για κάθε  $x \in H$ , τότε οι  $P_n$  είναι ανά δύο κάθετες (επομένως ισχύει το συμπέρασμα του (i)).

Εναλλακτική προσέγγιση: (Απόδειξη στο [orthproj26.pdf](#)).

**Πρόταση 65.** Έστω  $(P_n)$  ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert  $H$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε  $m \in \mathbb{N}$ , ισχύει ότι  $\sum_{n=1}^m P_n \leq I$ , ισοδύναμα  $\left\| \sum_{n=1}^m P_n \right\| \leq 1$ .

(ii) Οι  $P_n$  είναι ανά δύο κάθετες.

(iii) Για κάθε  $m \in \mathbb{N}$ , η  $Q_m := \sum_{n=1}^m P_n$  είναι προβολή.

(iv)  $\sum_{n=1}^m \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$  για κάθε  $x \in H$  και  $m \in \mathbb{N}$ .

(v) Για κάθε  $x \in H$  η σειρά  $\sum_n P_n x$  συγκλίνει στον  $H$ .

Τότε, για κάθε  $x \in H$  η σειρά  $\sum_n P_n x$  συγκλίνει στο  $P(M)x$ , όπου  $M$  είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των  $\text{im } P_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) και  $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$ .

**Πόρισμα 66.** Αν  $\{M_n\}$  είναι κάθετοι ανά δύο κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert και  $\vee M_n$  ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε  $M_n$ , τότε κάθε διάνυσμα  $x \in \vee M_n$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως συγκλίνουσα σειρά  $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$  όπου κάθε  $x_n \in M_n$  και  $\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$ .

---

<sup>7</sup>όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν  $\{Q_i\}$  άπειρη

## 6 Συμπαγείς τελεστές

### Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

**Ορισμός 67.** Μια γραμμική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  μεταξύ δύο γραμμικών χώρων  $E, F$  λέγεται *τάξης  $n$*  ( $n \in \mathbb{N}$ ) αν ο υπόχωρος  $T(E) = \text{im } T$  έχει διάσταση  $n$ . Γράφουμε  $\text{rank}(T) = n$ . Αν οι  $E, F$  είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με  $\mathcal{F}(E, F)$  το σύνολο των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων  $T : E \rightarrow F$  που έχουν πεπερασμένη τάξη (finite rank), δηλαδή

$$\mathcal{F}(E, F) = \{T \in \mathcal{B}(E, F) : \text{rank}(T) < +\infty\}.$$

Ειδικότερα, γράφουμε  $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E, E)$ . Αν  $H, K$  είναι χώροι Hilbert,  $v \in K$  και  $u \in H$  ορίζουμε τον τελεστή

$$vu^* : H \rightarrow K$$

$$\text{από τον τύπο } vu^*(x) = \langle x, u \rangle v \quad (x \in H).$$

Ο τελεστής  $vu^*$  είναι φραγμένος, και  $\|vu^*\| = \|v\| \cdot \|u\|$ . Κάθε  $T \in \mathcal{F}(H, K)$  πρώτης τάξης ( $\text{rank}(T) = 1$ ) είναι αυτής της μορφής (με  $u, v$  μη μηδενικά).

Κάθε  $T \in \mathcal{F}(H, K)$  γράφεται

$$T = \sum_{k=1}^n v_k u_k^*, \quad u_k \in H, v_k \in K$$

όπου  $\{v_k : k = 1, \dots, n\}$  ο.κ. βάση του  $\text{im } T$ .

Κάθε  $T \in \mathcal{F}(H, K)$  «ζει» μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης (των  $(\ker T)^\perp = \text{im } T^*$  και  $T(E) = \text{im } T$ ):

Ως προς τις διασπάσεις  $H = (\ker T)^\perp \oplus \ker T$  και  $K = \text{im } T \oplus (\text{im } T)^\perp$  ο  $T$  γράφεται

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Τοπολογική ιδιότητα:** Αν  $A \in \mathcal{F}(H, K)$ , τότε το  $A(\text{ball}(H))$  είναι (σχετικά) συμπαγές στον  $K$ .

### Συμπαγείς Τελεστές $\mathcal{K}(E, F)$

**Ορισμός 68.** Έστω  $E, F$  χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  λέγεται **συμπαγής (compact)** αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα  $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$  του  $E$  σε ένα  $\|\cdot\|$ -σχετικά συμπαγές υποσύνολο του  $F$  (αν δηλαδή το  $T(\hat{B}_E)$  είναι συμπαγές υποσύνολο του  $F$ ). Γράφουμε  $T \in \mathcal{K}(E, F)$ .

Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος, γιατί αν το σύνολο  $\overline{T(\hat{B}_E)}$  είναι συμπαγές, είναι βέβαια φραγμένο.

Οι **φραγμένοι** τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγείς.

*Παράδειγμα*

Αν  $a = (a_n) \in c_0$ , ο τελεστής  $D_a = \text{diag}(a_n) \in \mathcal{B}(\ell^2)$  είναι συμπαγής.

**Παρατήρηση.** Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό (πρδγ: Άσκηση!)

Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό (γιατί!).

**Παρατήρηση.**

$$\mathcal{F}(E, F) \subseteq \mathcal{K}(E, F) \subseteq \mathcal{B}(E, F).$$

αν οι  $E$  και  $F$  είναι απειροδιάστατοι, δεν ισχύουν οι ιδιότητες.

**Παραδείγματα** Ο ταυτοτικός τελεστής ή η προβολή σε έναν χώρο άπειρης διάστασης δεν είναι συμπαγής.

Ο  $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$  όπου  $a_n = \frac{1}{n}$  είναι συμπαγής αλλά έχει άπειρη τάξη.

**Υπενθύμιση: Χαρακτηρισμοί συμπαγούς μετρ. χώρου**

**Θεώρημα 69.** Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος και  $K \subseteq X$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το  $K$  είναι συμπαγές (δηλ. ο  $(K, \rho|_K)$  είναι συμπαγής χώρος).
2. Κάθε άπειρο υποσύνολο  $A$  του  $K$  έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο  $K$ .
3. Το  $K$  είναι ακολουθιακά συμπαγές (δηλ. κάθε ακολουθία στο  $K$  έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο  $K$ ).
4. Ο  $(K, \rho|_K)$  είναι **ολικά φραγμένος** (δηλ. για κάθε  $\varepsilon > 0$  ο  $K$  καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες ακτίνας  $\varepsilon > 0$ ) και **πλήρης**.

**Παρατήρηση** Σε πλήρη μετρ. χώρο  $X$ , ένα  $A \subseteq X$  είναι σχετικά συμπαγές (δηλ.  $\overline{A}$  συμπαγές) αν-ν είναι ολικά φραγμένο.

**Συμπαγείς Τελεστές**

**Θεώρημα 70.** Έστω  $E, F$  χώροι Banach,  $T : E \rightarrow F$  γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο  $T$  είναι συμπαγής.
- (ii) Για κάθε φραγμένο υποσύνολο  $A \subseteq E$ , το  $\overline{T(A)}$  είναι συμπαγές.
- (iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία  $\{x_n\}$  του  $E$ , η ακολουθία  $\{Tx_n\}$  έχει  $\|\cdot\|$ -συγκλίνουσα υπακολουθία.
- (iv) Το σύνολο  $T(B_E)$  είναι ολικά φραγμένο.

**Παρατήρηση:** Ο  $\mathcal{F}(E, F)$  είναι γραμμικός χώρος.

**Λήμμα 71.** Αν  $E, F$  είναι χώροι Banach, ο  $\mathcal{K}(E, F)$  είναι γραμμικός χώρος:  
Αν  $T, S \in \mathcal{K}(E, F)$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ , τότε  $T + \lambda S \in \mathcal{K}(E, F)$ .

**Παρατήρηση:** Γινόμενο φραγμένου τελεστή  $A$  με πεπερασμένης τάξης  $X \in \mathcal{F}(E, F)$  ή πεπερ. τάξης  $X$  με φραγμένο  $B$  είναι πεπερασμένης τάξης:

$$M \xrightarrow{B} E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{A} N$$

**Λήμμα 72.** Αν  $M, E, F, N$  είναι χώροι Banach,

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{B}(M, E), X \in \mathcal{K}(E, F) \text{ και } A \in \mathcal{B}(F, N) \\ \implies XB \in \mathcal{K}(M, F) \text{ και } AX \in \mathcal{K}(E, N) \end{aligned}$$

**Παρατήρηση:** Ο υπόχωρος  $\mathcal{F}(E, F)$  δεν είναι κλειστός στον  $\mathcal{B}(E, F)$  (σε απειροδιάστατους χώρους).

**Πρόταση 73.** Αν  $E, F$  είναι χώροι Banach, ο  $\mathcal{K}(E, F)$  είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach  $\mathcal{B}(E, F)$ , άρα χώρος Banach.

**Παρατήρηση:** Άρα, αν  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$  και κάθε  $A_n$  είναι συμπαγής, τότε ο  $A$  είναι συμπαγής. Όμως: Το κατά σημείο όριο ακολουθίας συμπαγών τελεστών (ακόμα και πεπερασμένης τάξης) δεν είναι πάντα συμπαγής.

**Παρατήρηση:** Ειδικότερα το  $\mathcal{K}(E)$  είναι (αμφίπλευρο) κλειστό ιδεώδες της άλγεβρας Banach  $\mathcal{B}(E)$ .

#### Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

**Θεώρημα 74.** Αν  $H$  είναι χώρος Hilbert και  $T \in \mathcal{B}(H)$ , τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο  $T$  είναι συμπαγής.
- (ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία  $\{x_n\}$  του  $H$ , ισχύει  $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$ .
- (iii) Υπάρχει μια ακολουθία  $\{F_n\}$  από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε  $\|T - F_n\| \rightarrow 0$ .

**Πόρισμα 75** (Άσκηση). Έστω  $H, K$  χώροι Hilbert και  $A \in \mathcal{B}(H, K)$ . Ο  $A$  είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $B \in \mathcal{F}(H, K)$  και  $C \in \mathcal{B}(H, K)$  ώστε  $\|C\| < \epsilon$  και  $A = B + C$ . Λέμε ότι «ο  $A$  είναι μικρή διαταραχή ενός τελεστή πεπερασμένης τάξης».

**Παρατήρηση** Δεν ισχύει σε όλους τους χώρους Banach (Per Enflo, Acta Math., **130** (1973)).



Ο Ρ. Ενφλο παραλαμβάνει το βραβείο από τον S. Mazur.

**Πρόταση 76.** Έστω  $H, K$  χώροι Hilbert. Αν η γραμμική απεικόνιση  $A : H \rightarrow K$  είναι συμπαγής, τότε οι υπόχωροι  $\overline{\text{im } A}$  και  $(\ker A)^\perp$  είναι διαχωρίσιμοι.

**Πρόταση 77.** Αν  $H, K$  είναι χώροι Hilbert και  $T \in \mathcal{B}(H, K)$  τότε

$$T \in \mathcal{K}(H, K) \iff T^*T \in \mathcal{K}(H) \iff T^* \in \mathcal{K}(K, H).$$

**Πρόταση 78.** Έστω  $H, K$  χώροι Hilbert και  $T \in \mathcal{B}(H, K)$ . Ο  $T$  είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε ορθοκανονική ακολουθία  $(x_n)$  του  $H$ , η ακολουθία  $(Tx_n)$  συγκλίνει ως προς την  $\|\cdot\|_K$ .

### Ολοκληρωτικοί Τελεστές

**Παράδειγμα:** Κάθε ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής: Έστω  $k \in C([a, b] \times [a, b])$ . Ο τελεστής  $A_k \in \mathcal{B}(L^2[a, b])$  με

$$(A_k f)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \quad f \in C([a, b])$$

είναι συμπαγής.

**Η ιδέα της απόδειξης.** Προσεγγίζουμε την  $k$  από γραμμ. συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων, οι οποίες ορίζουν ολοκληρωτικούς τελεστές πεπερασμένης τάξης. (Δες και το αρχείο [intops.pdf](#))

## **7 Φασματική Θεωρία συμπαγών τελεστών**