

Καλώς ήρθατε στη Θεωρία
Γραμμικών Τελεστών! (712)

<http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/>

Διαφάνειες μέχρι 15/10/2025

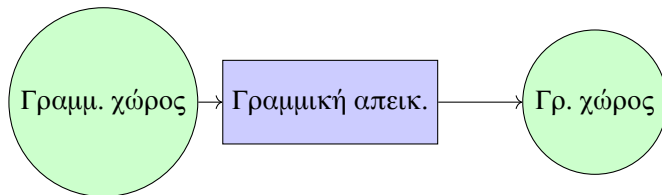
- 1 Εισαγωγικά
- 2 Γραμμικοί χώροι
- 3 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο
- Χώροι Hilbert
- Συνεχείς γραμμικές μορφές. Θεώρημα Riesz

Γουατ ιξ αν Οπερείτωρ?



Αρχή της υπέρθεσης (superposition principle).

Αν στην είσοδο u_1 αντιστοιχεί έξοδος v_1 και στην είσοδο u_2 αντιστοιχεί έξοδος v_2 και λ αριθμός, τότε για την είσοδο $u_1 + \lambda u_2$ αναμένουμε έξοδο $v_1 + \lambda v_2$.



Γουατ ιξ αν Οπερείτωρ?

Παράδειγμα 1. $T : f \mapsto a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$: διαφορικός τελεστής (εδώ οι a_i είναι «καλές» συναρτήσεις).

Πού ορίζεται; Στον χώρο $C_2(\Omega)$.

Παράδειγμα 2.

$$T : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto [a_{i,j}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ([x_i] \in \mathbb{C}^n, [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C}))$$

Παράδειγμα 3. $T : f \mapsto Tf$ όπου $(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$:
 ολοκληρωτικός τελεστής (εδώ g «καλή» συνάρτηση, 2π -περιοδική).
 Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρίσκω

$$Tf_n = \hat{g}(n)f_n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

όπου $\hat{g}(n)$ (μιγαδικοί) αριθμοί.

Δηλαδή, ως προς την οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$, ο T **διαγωνοποιήθηκε!**

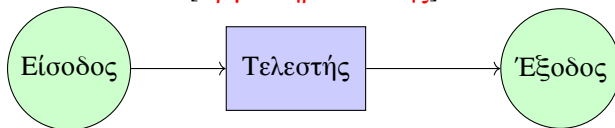
$$T \sim \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Γιατί; Γιατί είναι **ορθοκανονική**. Άρα, είναι βάση του χώρου που παράγει. Ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης, είναι όμως πυκνός στους χώρους που ενδιαφέρουν στην Ανάλυση...

Alice και Bob στην QIT (Κβαντική Θ. Πληροφορίας)

Δύο εργαστήρια: Εργαστήριο Αλίκης, Εργαστήριο Βασίλη.

[Εργαστήριο Αλίκης]

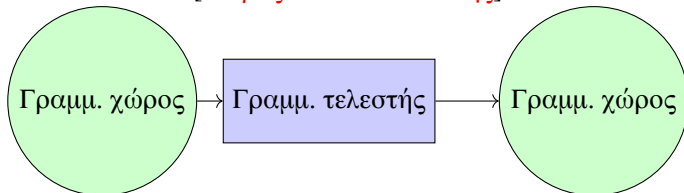


Μετάδοση Πληροφοριών

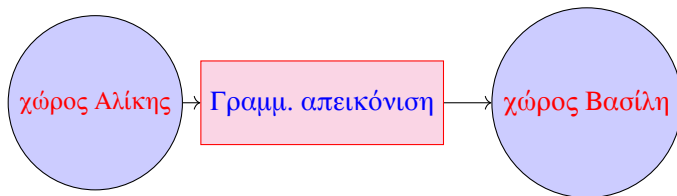


Τελεστές και Υπερτελεστές

[Χώρος Τελεστών Αλίκης]



[Απεικόνιση μεταξύ χώρων τελεστών Αλίκης $\rightarrow$ Βασίλη]



Δυο κουβέντες για Μιγαδικούς Αριθμούς

Το σύνολο

$$\mathbb{C} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

γίνεται σώμα αν εφοδιασθεί με τις πράξεις

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Γράφουμε $i = (0, 1)$ οπότε κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται μοναδικά $z = x + iy$ όπου $x, y \in \mathbb{R}$ και οι πράξεις προκύπτουν από την παρατήρηση ότι $i^2 = (-1, 0) = -1 + i0 = -1$, δηλαδή

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = xu + ixv + iyu + i^2 yv = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Ο μιγαδικός συζυγής $\bar{z}$ του $z = x + iy$ είναι ο $\bar{z} = x - iy$ οπότε το πραγματικό μέρος του $z = x + iy$ είναι $x = \frac{z + \bar{z}}{2} := \operatorname{Re} z$ και το φανταστικό του μέρος είναι $y = \frac{z - \bar{z}}{2i} := \operatorname{Im} z$.

Δυο κουβέντες για Μιγαδικούς Αριθμούς

Το μέτρο ενός $z = x + iy \in \mathbb{C}$ είναι ο μη αρνητικός αριθμός

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Κάθε μιγαδικός αριθμός z μέτρου 1 είναι της μορφής

$$z = e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta \text{ όπου } \theta \in \mathbb{R}.$$

Κάθε μιγαδικός αριθμός $z \neq 0$ γράφεται στη λεγόμενη πολική μορφή

$$z = e^{i\theta}|z| \text{ όπου } e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}.$$

Επομένως $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ και, αν $w = e^{i\phi}|w|$, έχουμε $zw = e^{i(\theta+\phi)}|z||w|$.

Γραμμικοί χώροι

$\mathbb{K}$ είναι το σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός

Ένα $X \neq \emptyset$ λέγεται **$\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος** αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+: X \times X \rightarrow X$ και $\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ ώστε

(I) **Αξιώματα της πρόσθεσης:** $\forall x, y, z \in X$,

(i) $x + y = y + x$.

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii) $\exists \vec{0} \in X$ ώστε $\forall x \in X, \vec{0} + x = x$.

(iv) $\forall x \in X \exists (-x) \in X$ ώστε $x + (-x) = \vec{0}$.

(II) **Αξιώματα του πολλαπλασιασμού:** $\forall x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(ii) $1x = x$.

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων

- Το $\mathbb{C}$.
- Αν $n \in \mathbb{N}$, ο $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από όλες τις n -αδες μιγαδικών αριθμών,

$$\vec{x} = (x(1), x(2), \dots, x(n))$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Γράφουμε καμιά φορά τα στοιχεία του $\mathbb{C}^n$ ως διανύσματα-στήλες (column vectors).

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1), \dots, x(n)]^T$$

(το σύμβολο T σημαίνει «ανάστροφος» (transpose)).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων II

- Ο χώρος

$$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C} \text{ τ.ω. } \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ με } x(n) = 0 \forall n > n_x\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη.

Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$

αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά

ανεξάρτητη και παράγει τον c_{00} : κάθε $x = (x(n)) \in c_{00}$ γράφεται

(μοναδικά) ως γραμμικός συνδυασμός $x = \sum_{m=1}^{n_x} x(m)e_m$.

Δηλαδή η $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του c_{00} .

Παρατηρούμε ότι ο c_{00} είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων

$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ των οποίων ο φορέας $\text{supp } x := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$ είναι

πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο $\{1, 2, \dots, n_x\}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων III

- Αν $A \neq \emptyset$ και $\mathbb{K}^A$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f: A \rightarrow \mathbb{K}$, τότε το $\mathbb{K}^A$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο:
αν $f, g \in \mathbb{K}^A$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, ορίζουμε $f + g, \lambda f \in \mathbb{K}^A$ θέτοντας

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad , \quad t \in A.$$

- Παράδειγμα: Αν $A = [n] \times [m]$ (εδώ $[n] := \{1, \dots, n\}$) τότε $\mathbb{K}^A$ είναι ο χώρος των $M_{nm}(\mathbb{K})$ των $n \times m$ πινάκων με συντελεστές από το $\mathbb{K}$.

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων IV

- Ο χώρος $\mathcal{R}[0,1]$ των Riemann-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$.

Κάθε συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά $f = u + iv$ όπου $u(t) := \frac{1}{2}(f(t) + \overline{f(t)})$, $v(t) := \frac{1}{2i}(f(t) - \overline{f(t)})$ (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η f λέγεται (Riemann)-ολοκληρώσιμη όταν οι u και v είναι Riemann-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int f(t)dt := \int u(t)dt + i \int v(t)dt,$$

Ο $\mathcal{R}[0,1]$ είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

- Ο χώρος $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγ. αριθμών (= συναρτήσεις $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλ. $\sum_n |x(n)|^2 < \infty$. Είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

Γραμμικοί χώροι

Αν E γραμμικός χώρος και $x \in E$, $A \subseteq E$, λέμε ότι το x ανήκει στην **γραμμική θήκη του A** (γράφουμε $x \in \text{span}(A)$) ή ότι είναι **γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του A** , αν υπάρχουν (πεπερ. πλήθος)

$x_1, \dots, x_n \in A$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Τα διανύσματα $y_1, \dots, y_m$ λέγονται **γραμμικά εξαρτημένα** αν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ισοδύναμα, αν το $\vec{0}$ είναι **μη τετριμμένος** γραμμικός συνδυασμός τους, δηλ. αν υπάρχουν $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$, **όχι όλα 0**, ώστε

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_m y_m = \vec{0}.$$

Είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** αν δεν υπάρχουν τέτοια μ_k , δηλαδή αν

$$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Γραμμικοί χώροι

Ένα μη κενό $M \subseteq E$ λέγεται **γραμμικά εξαρτημένο** αν περιέχει **κάποια** $y_1, \dots, y_m$ που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισοδύναμα, αν υπάρχει κάποιο $x \in M$ που είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $M \setminus \{x\}$, δηλ. ανήκει στην γραμμική θήκη του $M \setminus \{x\}$.

Το M είναι **γραμμικά ανεξάρτητο** αν για κάθε **πεπερασμένο** σύνολο $\{x_1, \dots, x_n\}$ στοιχείων του M ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Ένας $F \subseteq E$ λέγεται **(γραμμικός) υπόχωρος** του E αν $\text{span}(F) \subseteq F$, δηλαδή αν

$$x, y \in F \text{ και } \lambda \in \mathbb{K} \implies x + \lambda y \in F.$$

Ορισμός

Έστω E, F (πραγματικοί ή μιγαδικοί) γραμμικοί (:διανυσματικοί) χώροι. Μια απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ λέγεται γραμμική αν

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y).$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται (γραμμικός) ισομορφισμός αν επί πλέον είναι 1-1 και επί.

Δυο γραμμικοί χώροι E, F λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός $T : E \rightarrow F$.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω E ένας $\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα **εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product)** στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

- (i) $\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$
- (ii) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$
- (iv) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα (i)' $\langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle$.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,

(a) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}.$$

(b) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση

$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E .

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο: Παρατηρήσεις

(α) Μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) του ορισμού του εσωτερικού γινομένου λέγεται **ημι-εσωτερικό γινόμενο**.

Ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την θεμελιώδη ανισότητα Cauchy-Schwarz (όχι όμως και το (b) της Πρότασης).

(β) Αρκετοί συγγραφείς (ιδιαίτερα σε συγγράμματα μαθηματικής φυσικής ή άλλων εφαρμογών) ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο ώστε να είναι γραμμικό ως προς την δεύτερη μεταβλητή και αντιγραμμικό ως προς την πρώτη. Έτσι, ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$ ως εξής: $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x(k)}y(k)$.

(γ) Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αποκαλείται καμιά φορά και **χώρος προ-Hilbert (pre-Hilbert space)**.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Νόρμα σε έναν γραμμ. χώρο X είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

- 1 $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,
- 2 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ και
- 3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X , τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **χώρος με νόρμα**.

Η συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$ είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του). Όταν ο μετρ. χώρος (X, d) είναι πλήρης, ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **χώρος Banach**.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \rightarrow x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε.

Για παράδειγμα, η σύγκλιση ως προς τη νόρμα supremum στον $C([a, b])$ (δες πιο κάτω) εκφράζει την **ομοιόμορφη σύγκλιση** μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \iff f_n \rightarrow f \text{ ομοιόμορφα στο } [a, b].$$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Επομένως κάθε $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ γίνεται μετρικός χώρος (E, d) με

$$d(x, y) := \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2}, \quad x, y \in E$$

στον οποίο οι γραμμικές πράξεις

$$+ : (E, d) \times (E, d) \rightarrow (E, d) : (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : (\mathbb{K}, |\cdot|) \times (E, d) \rightarrow (E, d) : (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

είναι συνεχείς. Επίσης η απεικόνιση

$$(E, d) \times (E, d) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

είναι συνεχής.

Πρόταση

(α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\text{για κάθε } x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\text{αν } x, y \in E \text{ και } \langle x, y \rangle = 0, \text{ τότε } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Ορισμός

Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται **κάθετα** (συμβολικά $x \perp y$) όταν $\langle x, y \rangle = 0$.

Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται **ορθοκανονική (orthonormal)** αν $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.

Ορθοκανονική $\Rightarrow$ γραμμικά ανεξάρτητη. Προς την αντίστροφη:

Πρόταση (Διαδικασία Gram-Schmidt)

Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον E ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει¹ $[e_n : n = 1, 2, \dots, k] = [x_n : n = 1, 2, \dots, k]$.

Κάθε υπόχωρος $F \subseteq E$ πεπερασμένης διάστασης έχει μια αλγεβρική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ που είναι ορθοκανονική. Κάθε $x \in F$ γράφεται

μοναδικά
$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k. \text{ (γιατί;)}$$

¹με $[A]$ ή $\text{span } A$ θα συμβολίζουμε την γραμμική θήκη ενός $A \subseteq E$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $f \in E$ και F πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του E .

(1) Υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα $S(f) \in F$ που είναι πλησιέστερο στο f .

(2) Επιπλέον το $f - S(f)$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $g \in F$ και $f - g \perp F$, τότε $g = S(f)$.

Για την αποδειξη: 

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Λήμμα

Εστω $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική οικογενεια σ' έναν χώρο $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο.

Τότε, για κάθε $f \in E$ έχουμε

$$(\alpha) \quad \|f\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle f, e_k \rangle|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

όπου $S_n(f) := \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k$.

$$(\beta) \text{ (Ανισότητα Bessel)} \quad \|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |\langle f, e_k \rangle|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Λήμμα (συνεχεια)

Αν $F_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ τότε, για κάθε $f \in E$,

$$(\gamma) \quad f - S_n(f) \perp F_n$$

και το $S_n(f)$ είναι το μοναδικό διάνυσμα $g \in F_n$ που είναι κάθετο στον F_n .

$$(\delta) \quad \text{dist}(f, F_n) = \|f - S_n(f)\|,$$

δηλαδή $\|f - g\| \geq \|f - S_n(f)\| \quad \forall g \in F_n$ με ισότητα αν-ν $g = S_n(f)$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (γ), (δ))

(γ) Κάθε $g \in F$ γράφεται $g = \sum_{k=1}^n \langle g, e_k \rangle e_k$.

$$\begin{aligned} \text{Τώρα: } (f - g) \perp F &\iff \langle f - g, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \in [n] \iff \\ \langle g, e_k \rangle &= \langle f, e_k \rangle \quad \forall k \in [n] \iff g = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k = S(f). \end{aligned}$$

(δ) Στην (α) βάλε $f - g$ στη θέση του f , με $g \in F$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (II)

Αναδιατυπωση:

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $f \in E$ και F πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του E .

(1) Υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα $S(f) \in F$ που είναι πλησιέστερο στο f .

(2) Επιπλέον το $f - S(f)$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $g \in F$ και $f - g \perp F$, τότε $g = S(f)$.

• Αν $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι καποια ορθοκανονική βάση του F , το $S(f)$

δίνεται από τον τύπο $S(f) = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k$.

• Η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ : \vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \rightarrow \left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $\vec{\lambda} = (\langle f, e_1 \rangle, \langle f, e_2 \rangle, \dots, \langle f, e_n \rangle) \in \mathbb{K}^n$.

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **χώρος Hilbert** αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος

Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά **δεν είναι** χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E < \infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2 , με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο

$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των

ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του. Επομένως ο χώρος $(c_{oo}, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά **όχι** Hilbert, εφόσον δεν είναι πλήρης.

(d) Ο χώρος $C([a, b])$ **δεν είναι** πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα (Πλησιέστερο διάνυσμα (III))

Έστω F χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $E \neq \emptyset$ **κυρτό και πλήρες** υποσύνολο του F . Αν $x \in F \setminus E$, τότε υπάρχει μοναδικό $y_x \in E$ πλησιέστερο προς το x , δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x - y_x\| = d(x, E) := \inf\{\|x - z\| : z \in E\}$.

Πρόταση (Κάθετο διάνυσμα)

Έστω F χώρος με εσωτερικό γινόμενο, E **πλήρης γραμμικός υπόχωρος** του F . Αν $x \in F \setminus E$, το πλησιέστερο προς το x στοιχείο $y_x \in E$ είναι το μοναδικό $y \in E$ ώστε $x - y \perp E$.

Ορισμός

Το μοναδικό αυτό στοιχείο y_x του E ονομάζουμε **(ορθή) προβολή** του x στον E , και το συμβολίζουμε $P_E(x)$ ή $P(E)x$.

$$\forall x : x = P_E(x) + (x - P_E(x)) \text{ με } P_E(x) \perp (x - P_E(x)).$$

Θεώρημα (Υπαρξη καθέτου διανύσματος)

Έστω H είναι χώρος Hilbert και M κλειστός υπόχωρος του H . Αν $M \neq H$, υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Η πληρότητα δεν μπορεί να παραλειφθεί:

Παράδειγμα

Στον $(c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ υπάρχει γνήσιος κλειστός υπόχωρος M , ώστε $M^\perp = \{0\}$.

$$M = \left\{ x = (x(n)) \in c_{00} : \sum \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H , θέτω

$$A^\perp = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο $A^\perp$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H .

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H , τότε

$$M \oplus M^\perp = H.$$

Δηλαδή

$\forall y \in H$ γράφεται μοναδικά $y = y_M + y_\perp$ όπου $y_M \in M, y_\perp \in M^\perp$.

Πυθαγόρειο: $\|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 \quad \forall y \in H.$

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H . Η απεικόνιση

$$P_M : H \rightarrow H : y \rightarrow y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ότι η P_M είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται (ως γνωστόν) από τις σχέσεις $M + M^\perp = H$ και $M \cap M^\perp = \{0\}$. Η συνέχεια της P_M προκύπτει απ' το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 = \|y\|^2$$

$$\text{άρα} \quad \|P_M(y)\| = \|y_M\| \leq \|y\|$$

οπότε, αν $y_n \rightarrow y$ έχουμε

$$\|P_M(y_n) - P_M(y)\| = \|P_M(y_n - y)\| \leq \|y_n - y\| \rightarrow 0.$$

Παρατήρηση - Άσκηση Όταν H είναι χώρος Hilbert:

$A^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \text{span}(A)$ πυκνός στον H .

Ισοδύναμα Ένας γραμμικός υπόχωρος E ενός χώρου Hilbert H είναι πυκνός (dense) στον H αν και μόνον αν το μόνο διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον E είναι το 0 .

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό.

- 1 $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
- 2 Αν H Hilbert: $A^\perp = \{0\} \iff \overline{\text{span } A} = H$.
- 3 $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
- 4 $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
- 5 $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.
- 6 Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $E = E^{\perp\perp}$.
- 7 Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $E + F$ κλειστός.

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, ονομάζουμε f_x την απεικόνιση

$$f_x : E \rightarrow \mathbb{K} : y \mapsto \langle y, x \rangle.$$

Η f_x είναι γραμμική και συνεχής.

Παράδειγμα

Στον $E = c_{00}$, η γραμμική μορφή

$$f : E \rightarrow \mathbb{K} : (x(1), x(2), \dots) \mapsto \sum_n \frac{1}{n} x(n)$$

δεν είναι της μορφής $f = f_x$ με $x \in c_{00}$.

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \rightarrow \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f = f_x$, δηλαδή

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{για κάθε } y \in H.$$