Μια Ασκηση

Το φάσμα του bilateral shift U είναι ίσο με $\mathbb{T}$.

Ειδαμε στην ταξη οτι $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$: Αφου $\|U\| = 1$ εχουμε $\sigma(U) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Ομως αν $|\lambda| < 1$ τοτε ο $I - \lambda U^{-1}$ ειναι αντιστρεψιμος γιατι $\|\lambda U^{-1}\| = |\lambda| < 1$ αρα ο $U - \lambda I = U(I - \lambda U^{-1})$ ειναι αντιστρεψιμος, οποτε $\lambda \notin \sigma(U)$.

Εστω $z \in \mathbb{T}$, να δειξουμε οτι $z \in \sigma(U)$.

Υποθετουμε προς ατοπο [1] οτι ο $U - zI$ ειναι αντιστρεψιμος, οποτε θα ειναι *επι* του $\ell^2(\mathbb{Z})$, αρα θα υπαρχει $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ωστε

$$\begin{aligned} (U - zI)(a) &= e_0 \\ \text{ισοδυναμα} \;\; (Ua)(n) - za(n) &= \delta_{n,0} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ \text{δηλαδη} \;\; a(n-1) - za(n) &= \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Η σχεση

$$a(n-1) - za(n) = 0 \quad \forall n \neq 0 \tag{*}$$

δινει

$$a(0) = za(1) = z^2 a(2) = \ldots$$

οποτε, για καθε $k > 0$, εχουμε

$$|a(k)| = |z^k a(0)| = |a(0)|$$

αφου $z \in \mathbb{T}$. Εφοσον $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$ εχουμε $\sum_{k>0} |a(k)|^2 < \infty$ οποτε πρεπει $|a(0)| = 0$.

Τοτε ομως η σχεση

$$a(-1) - za(0) = 1$$

δινει $a(-1) = 1$ και συνεπως, απο την (*),

$$a(-2) = za(-1) = z, \; a(-3) = z^2 \; \ldots \; a(-k) = z^{k-1}$$

αρα $|a(-k)| = 1$ για καθε $k > 0$ που ειναι ατοπο αφου $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$. $\square$

[1] Ευχαριστιες στον Στ. Κουστα