Παρατηρησεις για το φασμα τελεστη

Θεωρούμε δυο χώρους Banach E και F και μια (μη μηδενική) γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$. Αν η T είναι φραγμένη με φραγμένο αντίστροφο, τότε η εικόνα $\mathrm{im}(T)$ είναι ίση με F, ειδικότερα είναι πυκνή στον F και υπάρχουν θετικοί αριθμοί m, M ώστε

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\| \quad \text{για κάθε } x \in E. \tag{*}$$

Μπορούμε να πάρουμε $M = \|T\|$ και $m = 1/\|T^{-1}\|$, αφού $\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|$.

Αντίστροφα, αν η T έχει πυκνή εικόνα και ικανοποιεί τις ανισότητες (*), τότε βεβαίως είναι 1-1, όμως είναι και επί, γιατί το σύνολο τιμών της είναι κλειστό:

Πράγματι, αν $Tx_n \to y$ τότε η ανισότητα $m\|x_i - x_j\| \leq \|Tx_i - Tx_j\|$ δείχνει ότι η ακολουθία (x_n) είναι Cauchy στον E, οπότε (πληρότητα!) συγκλίνει σε κάποιο x, και τότε, αφού ο T είναι φραγμένος (από το M), έχουμε $y = \lim Tx_n = T(\lim x_n) = Tx$.

Δηλαδή η απεικόνιση $T^{-1} : Tx \mapsto x : F \to E$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική, και η ανισότητα $m\|T^{-1}(Tx)\| \leq \|Tx\|$ δείχνει ότι είναι φραγμένη (από $1/m$).

Συμπέρασμα *Ένας φραγμένος τελεστής $T : E \to F$ είναι αντιστρέψιμος αν-ν έχει πυκνή εικόνα και υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq m\|x\|$ για κάθε $x \in E$ (λέμε «ο T είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του E»).*

Υποθέτουμε τώρα τώρα ότι ο $E = F$ είναι χώρος Hilbert H και ο $T \in \mathcal{B}(H)$ *φυσιολογικός* τελεστής. Αν ο T ικανοποιεί την ανισότητα $m\|x\| \leq \|Tx\|$ για κάθε $x \in H$, τότε και ο συζυγής του την ικανοποιεί, γιατί $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$. Έπεται ότι $\ker T^* = \{0\}$ και άρα $\mathrm{im}(T)^\perp = \{0\}$. Επομένως το $\mathrm{im}(T)$ είναι πυκνό, και καθώς είναι κλειστό, είναι ίσο με H. Δηλαδή ο $T : H \to H$ είναι 1-1 και επί, και ο αντίστροφός του είναι γραμμικός τελεστής και φραγμένος από $1/m$.

Συμπέρασμα *Ένας φραγμένος φυσιολογικός τελεστής $T : H \to H$ είναι αντιστρέψιμος αν-ν είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του H, δηλαδή αν-ν υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq m\|x\|$ για κάθε $x \in H$.*

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν φυσιολογικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ και έναν αριθμό $\lambda \in \mathbb{C}$ και ας εφαρμόσουμε τα προηγούμενα στον φυσιολογικό τελεστή $T := A - \lambda I$. Έχουμε τότε ότι:
$\lambda \notin \sigma(A)$, δηλ. ο T είναι αντιστρέψιμος , αν-ν υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|Ax - \lambda x\| \geq m$ για κάθε x στη μοναδιαία σφαίρα του H.

Ισοδύναμα:

Πρόταση 1. *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής, ένας $\lambda \in \mathbb{C}$ ανήκει στο φάσμα $\sigma(A)$ του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στη μοναδιαία σφαίρα του H ώστε $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$.*

Παρατήρηση Το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνον αν μπορούμε να διαλέξουμε για (x_n) την σταθερή ακολουθία $x_n = x$ για κάθε n (οπότε το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A). Γιαυτό λέμε ότι τα στοιχεία του φάσματος ενός φυσιολογικού τελεστή είναι «προσεγγιστικές ιδιοτιμές».

Το επόμενο πόρισμα είναι προφανές για ιδιοτιμές. Δείχνουμε ότι ισχύει και για προσεγγιστικές ιδιοτιμές.

Πόρισμα 2. *Το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς.*
Το φάσμα ενός θετικού τελεστή αποτελείται από μη αρνητικούς αριθμούς.

Απόδειξη. Έστω $A = A^*$ και $\lambda \in \sigma(A)$. Υπάρχει ακολουθία (x_n) από μοναδιαία διανύσματα ώστε $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι $|\langle (A - \lambda I)x_n, x_n\rangle| \to 0$ δηλαδή

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle - \lambda| \to 0\,.$$

Όμως $\langle Ax_n, x_n\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε n, άρα $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αν επιπλέον $A \geq 0$, τότε $\langle Ax_n, x_n\rangle \geq 0$ για κάθε n, άρα $\lambda \geq 0$. □