

## Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

**Εισαγωγή** Γραμμική Άλγεβρα:

**Πρόταση 1.** Έστω  $K \in M_n(\mathbb{C})$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ισχύει ακριβώς ένα από τα επόμενα:

ή η εξίσωση

$$\lambda x - Kx = y$$

έχει μοναδική λύση  $x \in \mathbb{C}^n$  για κάθε  $y \in \mathbb{C}^n$ , ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$\lambda x - Kx = 0$$

έχει μη μηδενικές λύσεις.

Πράγματι, αν δεν ισχύει το δεύτερο ενδεχόμενο, αν δηλαδή το  $\lambda$  δεν είναι ιδιοτιμή του  $K$ , τότε ο  $\lambda I - K$  είναι 1-1, και συνεπώς επί (!), άρα για κάθε  $y \in \mathbb{C}^n$  βρίσκουμε  $x = (\lambda I - K)^{-1}(y)$ .

**Θεώρημα 2.** Αν  $K$  είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο<sup>1</sup> Hilbert  $H$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq 0$ ,

ή η εξίσωση

$$\lambda x - Kx = y \tag{1}$$

έχει μοναδική λύση  $x \in H$  για κάθε  $y \in H$ , ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$\lambda x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

Δηλαδή, αν γνωρίζουμε ότι η (1) έχει, για  $y = 0$ , το πολύ μια λύση (οπότε αποκλείεται το δεύτερο ενδεχόμενο), τότε από την συμπάγεια του τελεστή  $K$  συμπεραίνουμε την ύπαρξη λύσης της (1) για κάθε  $y \in H$ , και μάλιστα ακριβώς μιας.

Το γεγονός ότι το αποτέλεσμα αυτό ισχύει και σε απειροδιάστατους χώρους είναι μία από τις βασικές αιτίες που οδήγησε στην μελέτη των συμπαγών τελεστών.

**Παρατηρήσεις 3.** (α) Η υπόθεση « $K$  συμπαγής» δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί. Για παράδειγμα ο τελεστής

$$U : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : e_n \mapsto e_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

δεν έχει καμιά ιδιοτιμή, αλλά, όταν  $\lambda \in \mathbb{T}$ , ο  $\lambda I - U$  δεν έχει αντίστροφο (Άσκηση!).

(β) Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα για  $\lambda = 0$ . Για παράδειγμα ο τελεστής

$$K : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) : e_n \mapsto \frac{1}{n}e_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

είναι συμπαγής και 1-1 (το  $\lambda = 0$  δεν είναι ιδιοτιμή του) αλλά (ο  $0I - K$ ) δεν είναι αντιστρέψιμος.

<sup>1</sup> Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach.

*Απόδειξη του Θεωρήματος* Εφόσον  $\lambda \neq 0$ , αντικαθιστώντας τον  $K$  με τον  $K/\lambda$ , μπορούμε στη συνέχεια να υποθέτουμε ότι  $\lambda = 1$ .

Έστω ότι η ομογενής εξίσωση  $x - Kx = 0$  έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Δηλαδή, ισοδύναμα, έστω ότι ο πυρήνας  $M_1 = \ker(I - K)$  δεν είναι τετριμμένος. Τότε είναι πεπερασμένης διάστασης, διότι ο  $K$  περιορισμένος στον  $M_1$  είναι ο ταυτοτικός τελεστής, και είναι συμπαγής.

Έστω αντίθετα ότι η ομογενής εξίσωση  $x - Kx = 0$  έχει μόνον τη μηδενική λύση. Δηλαδή, ο  $I - K$  είναι 1-1. Έπεται από το Λήμμα 2 ότι ο  $I - K$  είναι αντιστρέψιμος, οπότε για κάθε  $y \in H$  η εξίσωση  $x - Kx = y$  έχει την μοναδική λύση  $x = (I - K)^{-1}y$ .  $\square$

**Λήμμα 1.** Αν  $T \in \mathcal{B}(H)$  και  $\|T\| < 1$ , ο  $I - T$  είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το  $\|\cdot\|$ -όριο της σειράς

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

*Απόδειξη.* Αν θέσουμε

$$S_m = \sum_{n=0}^m T^n$$

τότε παρατηρούμε ότι

$$(I - T)S_m = S_m(I - T) = I - T^{m+1}$$

επομένως, επειδή  $\|T^{m+1}\| \leq \|T\|^{m+1} \rightarrow 0$ ,

$$\lim_m \|(I - T)S_m - I\| = \lim_m \|S_m(I - T) - I\| = \lim_m \|T^{m+1}\| = 0. \quad (2)$$

Όμως η ακολουθία  $\{S_m\}$  συγκλίνει. Πράγματι, αν  $m > n$ ,

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m T^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|T\|^k \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}.$$

Επειδή  $\|T\| < 1$ , έπεται ότι η  $\{S_m\}$  είναι βασική ακολουθία στην τοπολογία της νόρμας του  $\mathcal{B}(H)$ , επομένως συγκλίνει σε έναν  $S \in \mathcal{B}(H)$ . Από την (2) έχουμε ότι  $(I - T)S = S(I - T) = I$ , άρα  $S = (I - T)^{-1}$ .  $\square$

**Λήμμα 2.** Έστω  $K \in \mathcal{B}(H)$  συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής  $I - K$  έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι 1-1.

*Απόδειξη.* Έστω ότι ο  $I - K$  είναι 1-1. Υπάρχει ένας τελεστής  $F \in \mathcal{B}(H)$  πεπερασμένης τάξης ώστε  $\|K - F\| < 1$ . Αν  $K_1 = K - F \in \mathcal{K}(H)$ , τότε, από το Λήμμα 1, ο τελεστής  $I - K_1$  είναι αντιστρέψιμος.

Θέτουμε  $G = F(I - K_1)^{-1}$ .

Παρατηρούμε ότι ο  $I - G$  είναι 1-1.

Πράγματι, αυτό είναι φανερό από την υπόθεση ότι ο  $I - K$  είναι 1-1, αν παρατηρήσει κανείς ότι

$$(I - G)(I - K_1) = (I - K_1) - G(I - K_1) = I - K_1 - F = I - K$$

ισοδύναμα  $I - G = (I - K)(I - K_1)^{-1}$ .

Όμως ο χώρος  $H_o := \text{im } G = \text{im } F$  έχει πεπερασμένη διάσταση. Θέτουμε  $T = (I - G)|_{H_o}$ . Ο  $T$  απεικονίζει τον  $H_o$  στον  $H_o$  (γιατί αν  $x \in H_o$  τότε  $Tx = x - Gx \in H_o$ ) και είναι 1-1. Επομένως, αφού  $\dim H_o < \infty$ , ο  $T$  απεικονίζει τον  $H_o$  επί του  $H_o$ .

Δηλαδή, για κάθε  $v \in H_o$  υπάρχει μοναδικό  $u \in H_o$  ώστε  $u - Gu = v$ .

Έπεται τώρα ότι  $(I - G)(H) = H$ .

Πράγματι, για κάθε  $y \in H$ , εφόσον  $Gy \in H_o$ , υπάρχει μοναδικό  $u \in H_o$  ώστε  $u - Gu = Gy$ . Θέτοντας τώρα  $x = y + u$  έχουμε

$$(I - G)x = (y - Gy) + (u - Gu) = (y - Gy) + Gy = y.$$

Από τη σχέση  $I - K = (I - G)(I - K_1)$

προκύπτει τώρα ότι και ο  $I - K$  είναι επί του  $H$ .

Κατά συνέπεια, ορίζεται καλά η γραμμική απεικόνιση

$$Y = (I - K)^{-1} : H \rightarrow H$$

και μένει να δειχθεί ότι είναι φραγμένη.<sup>2</sup>

Έστω ότι δεν είναι. Υπάρχει τότε στον  $H$  μια ακολουθία  $(x_n)$  από μοναδιαία διανύσματα ώστε  $\|Yx_n\| \geq n$  για κάθε  $n$ .

Θέτουμε  $y_n = \frac{Yx_n}{\|Yx_n\|}$ . Αφού ο  $K$  είναι συμπαγής και η  $(y_n)$  είναι φραγμένη, θα υπάρχει μια υπακολουθία  $(y_{k_n})$  ώστε η  $(Ky_{k_n})$  να συγκλίνει, έστω στο  $z$ . Όμως

$$\|(I - K)y_{k_n}\| = \left\| (I - K) \frac{Yx_{k_n}}{\|Yx_{k_n}\|} \right\| = \frac{\|x_{k_n}\|}{\|Yx_{k_n}\|} \leq \frac{1}{k_n}$$

άρα  $y_{k_n} - Ky_{k_n} = (I - K)y_{k_n} \rightarrow 0$ . Εφόσον  $Ky_{k_n} \rightarrow z$ , έχουμε  $y_{k_n} \rightarrow z$  (άρα  $\|z\| = 1$ ). Από τη συνέχεια του  $K$  έπεται τώρα ότι  $Ky_{k_n} \rightarrow Kz$ , επομένως  $Kz = z$  από τη μοναδικότητα του ορίου, δηλ.  $(I - K)z = 0$ . Αυτό είναι άτοπο, αφού ο  $(I - K)$  είναι 1-1.  $\square$

<sup>2</sup> Αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης, δίνουμε όμως μια ανεξάρτητη και στοιχειώδη απόδειξη.