

Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις IV

Παράδοση: 7 Ιανουαρίου 2026

1. (α) Αποδείξτε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Hilbert H υπάρχει κλειστό και φραγμένο σύνολο που δεν είναι συμπαγές.

(β) Έστω $u = (u(n)) \in \ell^2$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$C_u := \{x = (x(k)) \in \ell^2 : |x(k)| \leq |u(k)| \text{ για κάθε } k\}$$

είναι συμπαγές.

2. Έστω H χώρος Hilbert. Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ και $AT = TB$ για κάθε τελεστή $T \in \mathcal{F}(H)$, ναδειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $A = B = \lambda I$.

3. Έστω H, K χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$. Δείξτε ότι ο T είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε ορθοκανονική ακολουθία (x_n) του H , η ακολουθία (Tx_n) συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_K$.

4. Αν H, K είναι χώροι Hilbert θεωρούμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(H \oplus K)$ με $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο T να είναι θετικός.

5. Δείξτε ότι η πολική αναπαράσταση $T = V|T|$ ενός $T \in \mathcal{B}(H)$ έχει την ακόλουθη ιδιότητα μοναδικότητας: Αν $T = UX$ όπου $X \geq 0$ και U μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $\overline{X(\mathcal{H})}$ τότε $U = V$ και $X = |T|$. [Θεωρείστε γνωστο ότι ένας θετικός τελεστής έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα.]

6. Δείξτε ότι αν ένας φραγμένος τελεστής A είναι διαγωνοποιήσιμος ως προς μία ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ τότε οι ιδιοτιμές του είναι ακριβώς οι αριθμοί a_n ώστε $Ae_n = a_ne_n$. Δείξτε επίσης ότι ο ιδιόχωρος M_λ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{e_n : a_n = \lambda\}$, ότι οι ιδιόχωροι αυτοί είναι κάθετοι ανά δυο και παράγουν τον H .

7. Αν $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ είναι ορθοκανονικές ακολουθίες σ' έναν χώρο Hilbert H και $\{a_n\}$ είναι φραγμένη ακολουθία αριθμών, δείξτε ότι η σειρά $\sum_n a_n(y_n x_n^*)(x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in H$ και ορίζει έναν φραγμένο τελεστή. Αν επιπλέον η $\{a_n\}$ είναι μηδενική ακολουθία, δείξτε ότι τότε ο τελεστής αυτός είναι συμπαγής.

8. Δείξτε ότι κάθε συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής A σ' έναν χώρο Hilbert H γράφεται στη μορφή $A = A_+ - A_-$ όπου οι A_+ και A_- είναι θετικοί τελεστές που ικανοποιούν $A_+A_- = A_-A_+ = 0$ και μετατίθενται με τον A και μεταξύ τους. Δείξτε επίσης ότι $|A| = A_+ + A_-$.