

Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις III

Παράδοση: 15 Δεκεμβρίου 2025

1. Αν P, Q είναι δύο ορθές προβολές σ' έναν χώρο Hilbert, δείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία $(P \vee Q) + (P \wedge Q) = P + Q \iff PQ = QP$.
2. Αν $V \in \mathcal{B}(H, K)$ ονομάζω $D := V^*V \in \mathcal{B}(H)$ και $R := VV^* \in \mathcal{B}(K)$. Αποδείξτε τις ισοδυναμίες:

$$D \text{ προβολή} \iff VV^*V = V \iff V^*VV^* = V^* \iff R \text{ προβολή}.$$

3. (i) Αν $H = \ell^2$ και $a \in \ell^\infty$, δείξτε ότι ο τελεστής D_a είναι προβολή αν και μόνον αν υπάρχει $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $a(n) = 1$ όταν $n \in \mathbb{M}$ και $a(n) = 0$ όταν $n \notin \mathbb{M}$.
(ii) Αν $H = L^2([0, 1])$ και $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής, δείξτε ότι ο τελεστής M_f είναι προβολή αν-ν $f = 0$ ή $f = 1$.
4. Αν P, Q είναι δύο (ορθές) προβολές σ' έναν χώρο Hilbert:
(i) Δείξτε ότι ο τελεστής $P + Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $P + Q \leq I$.
(ii) Δείξτε ότι ο τελεστής PQP είναι προβολή αν και μόνον αν $PQ = QP$. [Υποδείξη προαιρετική. Αν ο $R := PQP$ είναι προβολή, δείξτε ότι $R = PQ$.]
5. Αν $f \in C([0, 1])$, ορίζουμε την συνάρτηση Tf ως εξής:

$$(Tf)(x) = \int_0^1 (x - y)f(y)dy.$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση T επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή στον $L^2([0, 1])$ με $\|T\| = \frac{1}{\sqrt{12}}$.
Δείξτε ότι $\text{rank}(T) = 2$.

6. Στον χώρο Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$, θεωρούμε τον τελεστή της μετατόπισης S (με $Se_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$). Να δειχθεί ότι ο S προσεγγίζεται κατά σημείο από τελεστές πεπερασμένης τάξης, όχι όμως στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(\ell^2)$.
7. Στον χώρο Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{Z})$, θεωρούμε τον τελεστή της μετατόπισης U (με $Ue_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$). Να δειχθεί ότι για κάθε $x, y \in H$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U^n x, y \rangle = 0$. [Υποδείξη προαιρετική. Θεωρείστε πρώτα την περίπτωση όπου το x (ή το y) ανήκει στον πυκνο υποχώρο $c_{00}(\mathbb{Z})$ του H .]
8. (i) Έστω H χώρος Hilbert, $B \in \mathcal{K}(H)$. Αν $A_n, A \in \mathcal{B}(H)$ με $\|A_n x - Ax\| \rightarrow 0$ για κάθε $x \in H$, δείξτε ότι $\|A_n B - AB\| \rightarrow 0$.
[Σχόλιο: Δεν ισχύει εν γένει ότι $\|BA_n - BA\| \rightarrow 0$.]
Αν $\{P_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία προβολών και $P = \vee P_n$ είναι η προβολή στον κλειστό υπόχωρο που παράγουν οι $P_n(H)$, δείξτε ότι $\|BP_n - BP\| \rightarrow 0$ και $\|P_n BP_n - PBP\| \rightarrow 0$.
(ii) Αν ο H είναι διαχωρίσιμος, δείξτε ότι μπορούν να βρεθούν προβολές P_n πεπερασμένης τάξης ώστε $\vee P_n = I$. Χρησιμοποιώντας το (i), δώστε μια άλλη απόδειξη ότι κάθε συμπαγής τελεστής στον H προσεγγίζεται στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$ από τελεστές πεπερασμένης τάξης.