Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις III

1. Αν P, Q είναι δύο ορθές προβολές σ' έναν χώρο Hilbert, δείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία $(P \vee Q) + (P \wedge Q) = P + Q \iff PQ = QP$.

2. (α) Αν $V \in \mathcal{B}(H, K)$ ονομάζω $D := V^*V \in \mathcal{B}(H)$ και $R := VV^* \in \mathcal{B}(K)$. Αποδείξτε τις ισοδυναμίες:

$$D \text{ προβολή} \iff VV^*V = V \iff V^*VV^* = V^* \iff R \text{ προβολή}.$$

(β) Δείξτε ότι οι συνθήκες αυτές ισχύουν αν-ν η V είναι μερική ισομετρία, και τότε ο αρχικός της χώρος είναι ο $D(H) = (\ker V)^\perp$ και ο τελικός της χώρος είναι ο $R(K) = V(H)$.

3. Έστω $Y \in \mathcal{B}(H)$ και $X = Y^*Y$. Αν $P \in \mathcal{B}(H)$ είναι προβολή και $X \leq P$, δείξτε ότι $X = PXP$.

4. Αν $K \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής τελεστής, δείξτε ότι κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί $|\langle Ax, y\rangle| \leq |\langle Kx, y\rangle|$ για κάθε $x, y \in H$ είναι επίσης συμπαγής. Ειδικότερα αν επιπλέον $K \in \mathcal{B}_+(H)$, κάθε $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $-K \leq A \leq K$ είναι συμπαγής.

5. Έστω $K \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ συμπαγής τελεστής.

Έχουμε δείξει (12/04/2024) το ακόλουθο: Αν οι $A_n, A \in \mathcal{B}(H_2)$ ικανοποιούν $A_n y \to Ay$ για κάθε $y \in H_2$ και $\sup_n \|A_n\| < \infty$, τότε $\|A_n K - AK\| \to 0$. (Η συνθήκη $\sup_n \|A_n\| < \infty$ έπεται αυτομάτως (αφού η (A_n) είναι κατά σημείο συγκλίνουσα ακολουθία φραγμένων τελεστών) από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος.)

Δείξτε ότι το ανάλογο «από τα δεξιά» δεν ισχύει πάντα: Για παράδειγμα, αν $H_1 = H_2 = \ell^2$ και $K = e_1 e_1^*$, δείξτε ότι η ακολουθία (B_n) όπου $B_n = (S^*)^n$ ικανοποιεί $B_n x \to 0$ για κάθε $x \in H_1$, αλλά δεν ικανοποιεί $\|KB_n\| \to 0$.

6. (α) Αποδείξτε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Hilbert H υπάρχει κλειστό και φραγμένο σύνολο που δεν είναι συμπαγές.

(β) Δείξτε ότι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο $C \subseteq \ell^2$ είναι συμπαγές αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάχει n_ϵ ώστε *για κάθε* $x = (x(k)) \in C$ να έχουμε $\sum_{k > n_\epsilon} |x(k)|^2 < \epsilon^2$.

(γ) Έστω $u = (u(n)) \in \ell^2$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$C_u := \{x = (x(k)) \in \ell^2 : |x(k)| \leq |u(k)| \text{ για κάθε } k\}$$

είναι συμπαγές.

7. Δείξτε ότι κάθε συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής A γράφεται στη μορφή $A = A_+ - A_-$ όπου οι A_+ και A_- είναι θετικοί τελεστές που ικανοποιούν $A_+A_- = A_-A_+ = 0$ και μετατίθενται με τον A και μεταξύ τους.