

Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις II

Παράδοση: 19 Νοεμβρίου 2025

1. Έστω $a = \{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{C}$ τυχούσα ακολουθία. Θέτουμε

$$D_a x = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \dots) \quad (x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2).$$

(α) Ο D_a ορίζει φραγμένο τελεστή $\ell^2 \rightarrow \ell^2$ αν και μόνον αν η a είναι φραγμένη ακολουθία, και τότε $\|D_a\| = \|a\|_\infty$.

(β) Αν η a δεν είναι φραγμένη ακολουθία, τότε υπάρχει $x \in \ell^2$ ώστε $D_a x \notin \ell^2$.

2. Θέτουμε

$$Tx = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots) \quad (x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2).$$

(α) Δείξτε ότι ο T ορίζει φραγμένο τελεστή $\ell^2 \rightarrow \ell^2$ και υπολογίστε τη νορμα του.

(β) Δείξτε ότι ο $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ είναι 1-1, αλλά δεν είναι επί του ℓ^2 .

3. Αν $H = L^2([0, 1])$, δείξτε ότι το σύνολο $\{M_f : f \in C([0, 1])\}$ αποτελείται από φυσιολογικούς τελεστές. Δείξτε ότι ο M_f είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε $t \in [0, 1]$, θετικός αν και μόνον αν $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0, 1]$ και ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν $|f(t)| = 1$ για κάθε $t \in [0, 1]$.

4. *H νόρμα τελεστή.* Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, απο τον ορισμο εχουμε $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\}$.

(α) Δείξτε ότι $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle_2| : x \in \text{ball}(H_1), y \in \text{ball}(H_2)\}$.

(β) Αν $\{e_1, e_2, \dots\} \subseteq H_1$ και $\{f_1, f_2, \dots\} \subseteq H_2$ είναι ορθοκανονικές βάσεις των δυο χώρων και $a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$ δείξτε ότι

$$\|T\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^n y_i a_{ij} x_j \right| : \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

5. Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.

Να δειχθεί ότι $\overline{A(H_1)} = (\ker(A^*))^\perp$ και $\ker A = (A^*(H_2))^\perp$.

Εξεταστε τη σχέση μεταξύ $\ker(A)$ και $\ker(A^*A)$.

Είναι αλήθεια ότι $(\ker A)^\perp = A^*(H_2)$;

[Υπόδειξη: Εξετάστε τον τελεστή D_a στον ℓ^2 , για κατάλληλη ακολουθία $a \in \ell^\infty$.]

6. (α) Αν $X \in \mathcal{B}(H)$ και $Y \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, δείξτε ότι ο $XYX \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικός τελεστής.

(β) Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, δείξτε ότι $\ker(A + B) = \ker A \cap \ker B$.

7. Αν H είναι χώρος Hilbert και $A, P \in \mathcal{B}(H)$, θεωρούμε τον τελεστή

$$S \in \mathcal{B}(H \oplus H) \text{ με } S = \begin{bmatrix} P & A \\ A^* & P \end{bmatrix}.$$

Να δειχθεί ότι αν ο S είναι θετικός τότε ο P είναι θετικός και $\|A\| \leq \|P\|$.

(Εδώ $H_1 \oplus H_2$ είναι ο χώρος όλων των ζευγαριών $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ όπου $x \in H_1, y \in H_2$ με πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle := \langle x, u \rangle_{H_1} + \langle y, v \rangle_{H_2}.$$

8. (*H διαταξη καθορίζει τη νορμα.*) Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$, θεωρούμε τον τελεστή

$$T \in \mathcal{B}(H \oplus H) \text{ με } T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + Ay \\ A^*x + y \end{bmatrix}, \text{ δηλαδή } T = \begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix}.$$

Να δειχθεί ότι $\|A\| \leq 1$ αν και μόνον αν ο T είναι θετικός.