Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις ΙΙ

1. Εστω H χώρος Hilbert, (κλειστος) υποχωρος πεπερασμενης διαστασης. Ειδαμε οτι για καθε επιλογη ορθοκανονικης βασης $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του , η ορθη προβολη στον E δινεται απο τον τυπο

$$P_e(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \quad x \in H.$$

Τι μπορουμε να πουμε οταν ο (κλειστος, διαχωρισιμος) υποχωρος εχει απειρη διασταση;

2. Αν $k \in C([a,b] \times [a,b])$ δειξτε οτι για καθε $f \in C([a,b])$ η συναρτηση

$$x \mapsto (T_k^o f)(x) := \int_a^b k(x,y) f(y) dy$$

ειναι συνεχης στο $[a,b]$.

3. *Η νόρμα τελεστή.* Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, απο τον ορισμο εχουμε

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \le 1\}.$$

Δειξτε οτι $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle_2| : x \in \text{ball}(H_1), y \in \text{ball}(H_2)\}$.

Αν $\dim H_1 = m$, $\dim H_2 = n$ με ΟΚ βάσεις $\{e_1, \ldots, e_m\}$ και $\{f_1, \ldots, f_n\}$ και $a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$ δειξτε οτι

$$\|T\| = \sup\left\{ \left| \sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j \right| : \sum_{j=1}^{m} |x_j|^2 \le 1, \sum_{i1}^{n} |y_i|^2 \le 1 \right\}.$$

Τι μπορουμε να πουμε οταν οι χωροι ειναι απειροδιαστατοι διαχωρισιμοι;

4. Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.
Να δειχθεί ότι $\overline{(A(H_1))} = (\ker(A^*))^\perp$ και $\ker A = (A^*(H_2))^\perp$.
Να βρεθεί ο $\ker(A^*A)$.
Είναι αλήθεια ότι $(\ker A)^\perp = A^*(H_2)$;
[Υπόδειξη: Εξετάστε τον τελεστή D_a στον ℓ^2, για κατάλληλη ακολουθία $a \in \ell^\infty$.]

5. (α) Αν $X \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ και $Y \in \mathcal{B}(H_2)$ θετικός, δείξτε ότι ο $X^*YX \in B(H_1)$ είναι θετικός τελεστής.

(β) Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, δείξτε ότι $\ker(A+B) = \ker A \cap \ker B$.

6. Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$, θεωρούμε τον τελεστή
$T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με $T \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} x+Ay \\ A^*x+y \end{smallmatrix}\right]$, δηλαδή $T = \left[\begin{smallmatrix} I & A \\ A^* & I \end{smallmatrix}\right]$.
Να δειχθεί ότι $\|A\| \le 1$ αν και μόνον αν ο T είναι θετικός.
(Εδώ $H_1 \oplus H_2$ είναι ο χώρος όλων των ζευγαριών $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ όπου $x \in H_1, y \in H_2$ με πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \rangle := \langle x, u \rangle_{H_1} + \langle y, v \rangle_{H_2} .)$$

7. Δειξτε οτι το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό. (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό.

Δειξτε επισης οτι το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή, ακομα και συμαπγη, (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό.

8. Δειξτε οτι το *κατά σημείο* όριο ακολουθίας συμπαγών τελεστών (ακόμα και πεπερασμένης τάξης) δεν είναι πάντα συμπαγής.

9. Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) ο A είναι συμπαγής

(β) ο $|A| \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής

(γ) για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{F}(H, K)$ και $C \in \mathcal{B}(H, K)$ ώστε $\|C\| < \epsilon$ και $A = B + C$.