

Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις I

Δυο σχόλια

1. Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, δείξτε ότι η απεικόνιση

$$E \times E \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής (ως προς κάποια μετρική γινόμενο στον $E \times E$). Δείξτε ότι ο περιορισμός της σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του $E \times E$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Αποδειξη. Ξεκινάμε από το δεύτερο. Αν περιοριστούμε στην μπάλα $\text{ball}_R(E)$ ακτίνας $R > 0$, η απεικόνιση

$$\text{ball}_R(E) \times \text{ball}_R(E) \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πραγματι, αν τα σημεία x, y, x', y' ανήκουν στην $\text{ball}_R(E)$, έχουμε

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle - \langle x', y' \rangle| &= |\langle x, y - y' \rangle + \langle x - x', y' \rangle| \leq \|x\| \|y - y'\| + \|x - x'\| \|y'\| \\ &\leq R \|y - y'\| + R \|x - x'\| \end{aligned}$$

οπότε, για κάθε $\epsilon > 0$, αν $\|x - x'\| < \frac{\epsilon}{2R}$ και $\|y - y'\| < \frac{\epsilon}{2R}$ θα έχουμε $|\langle x, y \rangle - \langle x', y' \rangle| < \epsilon$.

Ομως, αν τα σημεία x, y, x', y' ΔΕΝ βρίσκονται όλα σε κάποια μπάλα, μπορώ να τα επιλεξω ώστε τα $\|x - x'\|$ και $\|y - y'\|$ να είναι μικρά ενώ η διαφορά $|\langle x, y \rangle - \langle x', y' \rangle|$ είναι μεγάλη.¹

Για παραδειγμα σταθεροποιώντας ένα μη μηδενικό $x_0 \in E$ και θετώντας για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$x(n) = n^2 x_0, \quad x'(n) = x(n) + \frac{1}{n} x_0, \quad y(n) = y'(n) = n^2 x_0,$$

έχουμε

$$\|x(n) - x'(n)\| = \frac{1}{n} \|x_0\| \rightarrow 0, \quad \|y(n) - y'(n)\| = 0,$$

αλλά

$$|\langle x(n), y(n) \rangle - \langle x'(n), y'(n) \rangle| = |\langle x(n) - x'(n), y(n) \rangle| = \left\langle \frac{1}{n} x_0, n^2 x_0 \right\rangle = n \|x_0\|^2 \rightarrow +\infty.$$

4. Έστω E_1, E_2 υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$ ώστε $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ και $E_1 + E_2 = \mathbb{C}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ γράφουμε $x = x_1 + x_2$ όπου $x_i \in E_i$. Αν $\|x_1\| \leq \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ (όπου $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα), δείξτε ότι οι E_1, E_2 είναι κάθετοι.

Αποδειξη. Αν οι E_1, E_2 ΔΕΝ είναι κάθετοι, υπάρχουν $x_i \in E_i$ με $\langle x_1, x_2 \rangle := z \neq 0$. Αν γράψουμε $z = |z|e^{i\theta}$ έχουμε $\langle e^{-i\theta} x_1, x_2 \rangle > 0$. Θετούμε $y_1 = e^{-i\theta} x_1$ και, για $t \in \mathbb{R}_+$, θετούμε $x_t = -ty_1$. Παρατηρούμε ότι $x_t \in E_1$ και $\langle x_t, x_2 \rangle < 0$: τα διανύσματα x_t and x_2 παραγουν έναν πραγματικό 2-διαστατο χώρο στον οποίο σχηματίζουν αμβλεία γωνία. Ισχυρίζομαι ότι για αρκετά μεγάλο $t > 0$ θα έχουμε²

$$\|x_t + x_2\| < \|x_t\|.$$

Πραγματι,

$$\begin{aligned} \|x_t + x_2\|^2 - \|x_t\|^2 &= \langle x_t + x_2, x_t + x_2 \rangle - \|x_t\|^2 \\ &= \|x_t\|^2 + \langle x_2, x_t \rangle + \langle x_t, x_2 \rangle + \|x_2\|^2 - \|x_t\|^2 \\ &= -t \langle x_2, y_1 \rangle - t \langle y_1, x_2 \rangle + \|x_2\|^2 \\ &= \|x_2\|^2 - 2t \langle y_1, x_2 \rangle \end{aligned}$$

το οποίο είναι < 0 , αρκεί να επιλεξουμε $t > \frac{\|x_2\|^2}{2 \langle y_1, x_2 \rangle}$.

¹ Η ιδέα προέρχεται από την Πραγματική, όπου είδαμε ότι η συνάρτηση $t \mapsto t^2$ είναι ομοιομορφα συνεχής στα φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, όχι όμως σε όλον τον $\mathbb{R}$.

² ένα σχήμα βοηθάει