

Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις Ι

Παράδοση: 29 Οκτωβρίου 2025

1. Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, δείξτε ότι η απεικόνιση

$$E \times E \rightarrow \mathbb{K} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής (ως προς κάποια μετρική γινόμενο στον $E \times E$). Δείξτε ότι ο περιορισμός της σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του $E \times E$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2. Έστω E γραμμικός χώρος και $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ απεικόνιση με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου εκτός της $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο).

Δείξτε ότι $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad (x, y \in E)$.

(α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $N = \{x \in E : \langle x, x \rangle = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E .

(β) Στον χώρο πηλίκου E/N , ορίζουμε

$$\langle [x], [y] \rangle = \langle x, y \rangle \quad x, y \in E$$

όπου $[x] = \{x + z : z \in N\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον E/N .

3. Έστω $E = C([a, b])$ και $\phi : E \rightarrow \mathbb{C}$ μια γραμμική μορφή που είναι θετική δηλ. για κάθε $f \in C([a, b])$ με $f \geq 0$ ισχύει $\phi(f) \in \mathbb{R}^+$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : C([a, b]) \times C([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ όπου

$$\langle f, g \rangle := \phi(\bar{g}f), \quad f, g \in C([a, b])$$

είναι ημι-εσωτερικό γινόμενο στον $C([a, b])$. Ποια είναι η διασταση του χώρου πηλίκου E/N στις περιπτώσεις

(α) $\phi(f) = f(a)$ και (β) $\phi(f) = \int_a^b f$;

4. Έστω E_1, E_2 υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$ ώστε $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ και $E_1 + E_2 = \mathbb{C}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ γράφουμε $x = x_1 + x_2$ όπου $x_i \in E_i$. Αν $\|x_1\| \leq \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ (όπου $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα), δείξτε ότι οι E_1, E_2 είναι κάθετοι.

5. Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό. Δείξτε ότι

1) $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.

2) $A^\perp = (\overline{\text{span } A})^\perp$.

3) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

4) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.

5) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.

6) Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $E = E^{\perp\perp}$.

7) Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $E + F$ κλειστός.

6. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ συγκλίνει και ότι

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \text{ αν και μόνον αν } x \in \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}. \text{ Μάλιστα}$$

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \text{dist}(x, K)^2$$

όπου $K = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

7. (α) Εξετάστε αν η γραμμική απεικόνιση $\phi : f \mapsto f(\frac{1}{2})$ είναι $\|\cdot\|_2$ -συνεχής γραμμική μορφή στον $C([0, 1])$.

(β) Εξετάστε αν η γραμμική μορφή $\psi : f \mapsto \int_{1/2}^1 f(t)dt$ είναι (i) $\|\cdot\|_2$ -συνεχής και (ii) της μορφής $f \mapsto \langle f, g \rangle$ για κάποια $g \in C([0, 1])$.