

Μια άσκηση

Πρόταση 0.1 Αν οι P, Q είναι ορθές προβολές σε χώρο Hilbert H και $\|P + Q\| \leq 1$ τότε η $P + Q$ είναι ορθή προβολή (βεβαίως ισχύει και το αντίστροφο).

Απόδειξη Αρκεί να δειχθεί ότι $QP = 0$. Αν $x \in H$, θέτουμε $y = Px$. Έχουμε

$$\langle Py, y \rangle + \langle Qy, y \rangle = \langle (P + Q)y, y \rangle \leq \|(P + Q)y\| \|y\| \leq \|y\|^2.$$

Όμως $\langle Py, y \rangle = \|y\|^2$ και $\langle Qy, y \rangle = \|Qy\|^2 \geq 0$, οπότε η προηγούμενη ανισότητα γίνεται

$$\|y\|^2 + \|Qy\|^2 \leq \|y\|^2.$$

άρα $\|Qy\|^2 = 0$. Δείξαμε ότι $QP x = Qy = 0$.