Γραμμικοί Τελεστές (712)

Εξετάσεις 26 Σεπτεμβρίου 2006

Να γραφούν 4 θέματα

1. Να δοθεί παράδειγμα
(α) φραγμένου τελεστή που δεν είναι φυσιολογικός
(β) φυσιολογικού τελεστή που δεν είναι αυτοσυζυγής
(γ) αυτοσυζυγούς τελεστή που δεν είναι θετικός
(δ) θετικού τελεστή που δεν είναι προβολή
(ε) δύο ορθών προβολών που δεν μετατίθενται.

2. Έστω H χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$ ισομετρία. Δείξτε ότι ο T είναι επί αν και μόνον αν ο T^* είναι 1-1, αν και μόνον αν ο TT^* είναι 1-1 .

3. Έστω $H = \ell^2$ και $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Αποδείξτε πλήρως ότι ο διαγώνιος τελεστής $D_a : H \to H$ είναι φραγμένος και φυσιολογικός. Πότε είναι ο D_a συμπαγής;

4. Αν $\{e_n : n = 1, 2, \ldots\}$ είναι η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του $H = (\ell^2, \|\cdot\|_2)$, να αποδειχθεί πλήρως ότι υπάρχει φραγμένος τελεστής $S : H \to H$ ώστε $Se_n = e_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Να αποδειχθεί ότι ο S είναι ισομετρία και ότι $\lim_n \|(S^*)^n x\|_2 = 0$ για κάθε $x \in H$.

5. Έστω H χώρος Hilbert.

(α) Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές δείξτε ότι ο τελεστής ABA είναι θετικός.

(β1) Αν $P \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθή προβολή, αποδείξτε ότι
$0 \leq \langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ για κάθε $x \in H$.

(β2) Αν $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθές προβολές, αποδείξτε ότι ο τελεστής $P + Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $\|P + Q\| \leq 1$.

6. (α) Διατυπώστε το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς φυσιολογικούς τελεστές σε χώρο Hilbert.

(β) Έστω H χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής B ώστε $A = B^3$.

Καλή επιτυχία!