Γραμμικοί Τελεστές (712)

Εξετάσεις 29 Αυγούστου 2006

Να γραφούν 4 θέματα

1. Έστω H χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$.
(α) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει φραγμένος τελεστής T^* που ικανοποιεί $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ για κάθε $x, y \in H$.
(β) Να αποδειχθεί ότι ισχύει $T^*T = TT^*$ αν και μόνον αν $\|T^*x\| = \|Tx\|$ για κάθε $x \in H$.

2. Έστω H χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Να δειχθεί ότι ο T είναι ισομετρία αν και μόνον αν $T^*T = I$.
Είναι μια ισομετρία πάντα επί;

3. Έστω $H = L^2([0,1])$ και $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε πλήρως ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_f : H \to H$ είναι φραγμένος και φυσιολογικός. Αν $f \neq 0$, δείξτε ότι ο M_f δεν είναι συμπαγής.

4. Αν $\{a_n\}$ είναι φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών, θέτουμε

$$S_a(x_1, x_2, \ldots) = (0, a_1x_1, a_2x_2, \ldots)$$

όπου $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2$. Να βρεθεί ο S_a^* και να υπολογισθεί η $\|S_a\|$. Πότε είναι ο S_a συμπαγής τελεστής;

5. Έστω H χώρος Hilbert.

(α) Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, είναι πάντα ο τελεστής AB θετικός;

(β) Αν $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθές προβολές, αποδείξτε ότι ο τελεστής PQ είναι θετικός αν και μόνον αν $PQ = QP$.

6. Έστω H χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν θετικοί τελεστές A_+, A_- ώστε

$$A = A_+ - A_- \quad \text{και} \quad A_+A_- = 0 = A_-A_+.$$

[Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που ο A είναι διαγώνιος τελεστής.]

Καλή επιτυχία!