Γραμμικοί Τελεστές (712)

Εξετάσεις 31 Μαΐου 2004

1. (2,5 μ) Πότε ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής A σε έναν χώρο Hilbert είναι φυσιολογικός (normal); αυτοσυζυγής (selfadjoint); θετικός; ορθομοναδιαίος (unitary); (Να δοθούν οι ορισμοί) Δώστε παραδείγματα που να διαφοροποιούν τις κλάσεις αυτές μεταξύ τους και από την κλάση όλων των τελεστών.

2. (2 μ) Έστω $H = \ell^2(\mathbb{N})$ και $a = \{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Να ορισθεί ο διαγώνιος τελεστής D_a που αντιστοιχεί στην ακολουθία a και να αποδειχθεί πλήρως ότι είναι φραγμένος και φυσιολογικός. Πότε είναι προβολή;

3. (2 μ) Έστω H χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Δείξτε ότι $\|Ax\| = \|A^*x\|$ για κάθε $x \in H$ και ότι $\|A\|^4 = \|A^2\|^2$.

4. (2 μ) Έστω H χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(H)$ με $P^2 = P$. Να αποδειχθεί ότι

$$P = P^* \iff \ker P \perp P(H).$$

(Υπόδειξη: $\ker P = (I - P)(H)$.)

5. (2,5 μ) Αν P, Q είναι ορθές προβολές σε έναν χώρο Hilbert H, να διατυπωθεί και να αποδειχθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ο τελεστής PQ να είναι ορθή προβολή. Να δοθεί συγκεκριμένο παράδειγμα στο οποίο η συνθήκη αυτή να μην ισχύει.

6. (2,5 μ) Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $U \in \mathcal{B}(H)$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- (ι) $U^*U = I$
- (ιι) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του H, η $\{Ux_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία.

Αν ο U ικανοποιεί τις συνθήκες αυτές, είναι αναγκαστικά φυσιολογικός;

7. (2 μ) Διατυπώστε το φασματικό θεώρημα για συμπαγείς φυσιολογικούς τελεστές.
Αν K είναι συμπαγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert, αποδείξτε ότι ο K είναι θετικός αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία *θετικών* αριθμών $\{a_n\}$ με $a_n \to 0$ και ακολουθία καθέτων ανά δύο προβολών πεπερασμένης τάξης $\{P_n\}$ ώστε

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n.$$

Να γραφούν το πολύ πέντε θέματα.
Καλή επιτυχία!