Γραμμικοί Τελεστές (712)

Εξετάσεις 15 Ιουνίου 2004

1. Πότε ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής A σε έναν χώρο Hilbert είναι φυσιολογικός (normal); αυτοσυζυγής (selfadjoint); θετικός; ορθομοναδιαίος (unitary); Δώστε παραδείγματα που να διαφοροποιούν τις κλάσεις αυτές μεταξύ τους και από την κλάση όλων των τελεστών.

2. Έστω $H = L^2([0,1])$ και $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε πλήρως ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_f : H \to H$ είναι φραγμένος και φυσιολογικός. Πότε είναι ο M_f ορθομοναδιαίος (unitary) τελεστής;

3. Έστω H χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$. Δείξτε ότι $\ker A = (\operatorname{ran}(A^*))^\perp$ και ότι $\ker A = \ker A^*A$.

4. Έστω H χώρος Hilbert και $M \subseteq H$ κλειστός υπόχωρος. Να ορισθεί πλήρως η ορθή προβολή $P_M : H \to H$ επί του M και να αποδειχθεί ότι είναι αυτοσυζυγής τελεστής.

5. Αν P, Q είναι ορθές προβολές σε έναν χώρο Hilbert H, να δειχθεί ότι ο τελεστής PQP είναι πάντα θετικός, και ότι ο τελεστής PQ είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν είναι θετικός.

6. Έστω $H = \ell^2(\mathbb{N})$ και $U \in \mathcal{B}(H)$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

- (ι) $U^*U = I$
- (ιι) Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του H τότε η $\{Ue_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία.

Αν ο U ικανοποιεί τις συνθήκες αυτές, είναι αναγκαστικά φυσιολογικός;

7. Αν $\{a_n\}$ είναι ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $a_n \to 0$ και $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, a_1x_1, a_2x_2, \ldots)$$

όπου $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2$. Να αποδειχθεί ότι ο T είναι συμπαγής τελεστής και ότι δεν έχει ιδιοτιμές.
Είναι δυνατόν ο T να είναι φυσιολογικός;

Να γραφούν πέντε θέματα.
Καλή επιτυχία!