# Γραμμικοί Τελεστές (712)

Εξετάσεις 16 Ιανουαρίου 2018

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες.*
*Αξιολογούνται περισσότερο οι ολοκληρωμένες απαντήσεις*
*(δηλ. σε όλα τα ερωτήματα ενός θέματος).*

Στα ακόλουθα, $H, K$ είναι *μιγαδικοί* χώροι Hilbert.

1. Διατυπώστε το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz για τις συνεχείς γραμμικές μορφές σε έναν χώρο Hilbert. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αυτό, αποδείξτε πλήρως ότι αν $\phi : H \times H \to \mathbb{C}$ είναι ένα φραγμένο ημιεσωτερικό γινόμενο,[1] τότε υπάρχει ένας μοναδικός θετικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $\phi(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H$. Αν η $\phi$ είναι εσωτερικό γινόμενο, τι συμπεραίνετε για τον $A$;

2. Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ είναι ορθοκανονική ακολουθία, εξετάστε αν υπάρχει φραγμένος τελεστής $A : H \to H$ ώστε

   (α′) $Ax_n = \sin(n)x_{3n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

   (β′) $Ax_n = n^2 x_{3n}$για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

   (Αποδείξτε πλήρως τους ισχυρισμούς σας).

3. Συμβολίζουμε $C_c(\mathbb{R})$ τον γραμμικό χώρο των συνεχών συναρτήσεων $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με συμπαγή φορέα. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και φραγμένη, δείξτε ότι η απεικόνιση $g \to fg : C_c(\mathbb{R}) \to C_c(\mathbb{R})$ επεκτείνεται σε φραγμένο αυτοσυζυγή τελεστή $A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

   Δείξτε ότι αν $\lambda \notin \overline{f(\mathbb{R})}$ ο τελεστής $A - \lambda I$ έχει φραγμένο αντίστροφο.

4. Έστω $(P_n)$ ακολουθία ορθών προβολών του $\mathcal{B}(H)$ με την ιδιότητα, για κάθε $x \in H$ η ακολουθία $(\|P_n x\|)$ να είναι φθίνουσα. Αν $P$ είναι η ορθή προβολή στην τομή $\bigcap_n P_n(H)$, δείξτε ότι $Px = \lim_n P_n x$ για κάθε $x \in H$.

5. (α) Έστω $T \in \mathcal{B}(H, K)$. Δείξτε ότι $\ker T = (T^*(K))^\perp = \ker T^*T$.

   (β) Αν $V \in \mathcal{B}(H, K)$ είναι μερική ισομετρία, δείξτε ότι ο $V$ είναι συμπαγής αν και μόνον αν είναι πεπερασμένης τάξης.

6. Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής, μη μηδενικός και φυσιολογικός, δείξτε ότι $T^n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δώστε ένα παράδειγμα συμπαγούς τελεστή $T \neq 0$ με $T^2 = 0$.

7. Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής και θετικός, δείξτε ότι υπάρχει $x \in H, x \neq 0$ ώστε $Tx = \|T\| x$. Δώστε ένα παράδειγμα θετικού τελεστή για τον οποίο η ισότητα αυτή δεν επιτυγχάνεται.

**Καλή επιτυχία!**

[1] δηλ. $\phi(x + \lambda y, z) = \phi(x, z) + \lambda\phi(y, z)$, $\phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)}$ και $\phi(x, x) \geq 0$ για κάθε $x, y, z \in H$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.