Εναλλακτική προσέγγιση στους ολοκληρωτικούς τελεστές

Στη συνέχεια [1] τα X και Y θα είναι συμπαγή διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Στόχος *Αν δοθεί $k \in L^2(X \times Y)$, να ορίσουμε φραγμένο τελεστή $A_k : L^2(Y) \to L^2(X)$ (μάλιστα συμπαγή) ώστε, όταν η k είναι συνεχής στο $X \times Y$, να έχουμε*

$$(A_k f)(x) = \int_Y k(x,y) f(y) dy \qquad f \in C(Y)\,. \tag{1}$$

Για $f \in C(Y)$, $g \in C(X)$ ορίζουμε την συνάρτηση $g \otimes \bar{f}$ από την σχέση

$$(g \otimes \bar{f})(x,y) := g(x)\bar{f}(y), \quad (x,y) \in X \times Y\,.$$

Παρατήρησε ότι $g \otimes \bar{f} \in C(X \times Y) \subseteq L^2(X \times Y)$ και μάλιστα

$$\|g \otimes \bar{f}\|_{XY}^2 = \iint |g(x)\bar{f}(y)|^2 dx dy = \int |g(x)|^2 dx \int |\bar{f}(y)|^2 dy = \|f\|_2^2 \|g\|_2^2$$

(όπου συμβολίζουμε εδώ για ευκολία με $\|\cdot\|_{XY}$ τη νόρμα του $L^2(X \times Y)$ που επάγεται από το εσωτερικό του γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_{XY}$).

Αφού $k \in L^2(X \times Y)$ και $g \otimes \bar{f} \in L^2(X \times Y)$, το εσωτερικό γινόμενο $\left\langle k, g \otimes \bar{f} \right\rangle_{XY}$ ορίζεται.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi_k : C(Y) \times C(X) \to \mathbb{C} : (f,g) \mapsto \left\langle k, g \otimes \bar{f} \right\rangle_{XY}\,.$$

Παρατηρούμε ότι

- η $C(Y) \to \mathbb{C} : f \mapsto \phi_k(f,g)$ είναι γραμμική για κάθε $g \in C(X)$
- η $C(X) \to \mathbb{C} : g \mapsto \phi_k(f,g)$ είναι αντιγραμμική για κάθε $f \in C(Y)$
- $|\phi_k(f,g)| = |\left\langle k, g \otimes \bar{f} \right\rangle| \le \|k\|_{XY} \|g \otimes \bar{f}\|_{XY} = \|k\|_{XY} \|f\|_2 \|g\|_2$ για κάθε $f \in C(Y)$, $g \in C(X)$.

Συνεπώς η ϕ_k είναι $\|\cdot\|_2$-φραγμένη sesquilinear μορφή στο $(C(Y), \|\cdot\|_2) \times (C(X), \|\cdot\|_2)$. Επομένως επεκτείνεται (όπως έχουμε δείξει) σε φραγμένη sesquilinear μορφή στο $L^2(Y) \times L^2(X)$. Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα Riesz,

Υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $A_k : L^2(Y) \to L^2(X)$ ώστε

$$\langle A_k f, g \rangle = \phi_k(f,g) = \left\langle k, g \otimes \bar{f} \right\rangle_{XY} \qquad \text{για } g \in L^2(X), f \in L^2(Y)$$

και μάλιστα

$$|\langle A_k g, f \rangle| = |\left\langle k, g \otimes \bar{f} \right\rangle_{XY}| \le \|k\|_{XY} \|f\|_2 \|g\|_2$$

πράγμα που δείχνει αμέσως την χρήσιμη ανισότητα

$$\|A_k\| \le \|k\|_{XY}\,. \tag{2}$$

Όταν η k είναι συνεχής στο $X \times Y$, ο A_k ικανοποιεί την (1). Πράγματι, αν πάρουμε τις g και f συνεχείς, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int (A_k f)(x) \bar{g}(x) dx = \langle A_k f, g \rangle &= \left\langle k, g \otimes \bar{f} \right\rangle_{XY} \\ &= \iint k(x,y) \overline{(g \otimes \bar{f})}(x,y) dx dy \\ &= \iint k(x,y) \overline{g(x)\bar{f}(y)} dx dy \\ &= \int \left(\int k(x,y) f(y) dy \right) \bar{g}(x) dx \end{aligned} \tag{3}$$

κι αφού η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $g \in C(X)$, έπεται ότι $(A_k f)(x) = \int k(x,y) f(y) dy$.

[1] intops 13 Δεκεμβρίου 2022

Πρόταση 1. *Για κάθε $k \in L^2(X \times Y)$, ο τελεστής $A_k : L^2(Y) \to L^2(X)$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του $L^2(X \times Y)$, υπάρχει ακολουθία (k_n) *συνεχών* συναρτήσεων στο $X \times Y$ ώστε

$$\|k - k_n\|_{XY} \to 0\,.$$

Έπεται από την (2) ότι

$$\left\|A_k - A_{k_n}\right\| \le \|k - k_n\|_{XY} \to 0$$

επομένως, αν κάθε A_{k_n} είναι συμπαγής, τότε και ο A_k θα είναι συμπαγής. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο A_k είναι συμπαγής όταν η k είναι συνεχής συνάρτηση.

Η ιδέα της απόδειξης είναι να παρατηρήσουμε ότι ένας ολοκληρωτικός τελεστής που ο πυρήνας του είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός *ορθογωνίου* ορίζει τελεστή *πρώτης τάξης*, και να προσεγγίσουμε τον A_k ως προς τη νόρμα τελεστή από ολοκληρωτικούς τελεστές με τέτοιους πυρήνες.

Παρατήρηση 2. *Αν $k_0(x,y) = k_1(x)\bar{k}_2(y)$ όπου k_1 και k_2 είναι Riemann ολοκληρώσιμες στα X και Y, τότε ο τελεστής A_{k_0} (ορίζεται και) είναι* φραγμένος τελεστής πρώτης τάξης.

Συνεπώς αν η συνάρτηση k είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων «χωριζομένων μεταβλητών» (όπως η k_0) τότε ο A_k έχει πεπερασμένη τάξη, άρα είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Για f, g συνεχείς έχουμε από την (3)

$$\begin{aligned}\langle A_k f, g\rangle &= \iint k_1(x)\bar{k}_2(y)\overline{g(x)\bar{f}(y)}dxdy \\ &= \left(\int f(y)\bar{k}_2(y)dy\right)\left(\int k_1(x)\bar{g}(x)dx\right) \\ &= \langle f, k_2\rangle \langle k_1, g\rangle = \langle \langle f, k_2\rangle k_1, g\rangle = \langle (k_1 k_2^*)(f), g\rangle\end{aligned}$$

επομένως $A_{k_0}(f) = (k_1 k_2^*)(f)$, άρα

$$A_{k_0} = k_1 k_2^*\,.$$

• Έπεται λοιπόν από την ανισότητα (2) πως αν δείξουμε ότι κάθε $k \in C(X \times Y)$ προσεγγίζεται *ως προς τη νόρμα του* $L^2(X \times Y)$ (!) από γραμμικούς συνδυασμούς συναρτήσεων «χωριζομένων μεταβλητών» θα έχουμε δείξει ότι ο A_k είναι συμπαγής τελεστής.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε το επόμενο Λήμμα:

Λήμμα 3. *Αν $k : X \times Y \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ξένων ανά δύο ορθογωνίων $R_{1,1}, \ldots R_{n,n}$ στο $X \times Y$ και $a_{1,1}, \ldots a_{n,n} \in \mathbb{C}$ ώστε* [2]

$$\text{αν} \quad k_\epsilon = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\chi_{R_{i,j}} \qquad \text{τότε} \quad \|k - k_\epsilon\|_\infty \le \epsilon\,.$$

Απόδειξη. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της k, για το $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν (x,y) και (s,t) είναι σημεία του $X \times Y$ που ικανοποιούν $\max\{|x-s|, |y-t|\} < \delta$, τότε $|k(x,y) - k(s,t)| < \epsilon$.

Ας διαμερίσουμε τώρα το $X \times Y = [a,b] \times [c,d]$ σε πεπερασμένο πλήθος ξένων ανά δύο ορθογωνίων με πλευρές μήκους μικρότερου από δ: για παράδειγμα, ας διαλέξουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{b-a}{n} < \delta$ και $\frac{d-c}{n} < \delta$, και ας θέσουμε $R_{i,j} = I_i \times J_j$, όπου $I_i = [\frac{(i-1)(b-a)}{n}, \frac{i(b-a)}{n})$ όταν $i = 1, \ldots, n-1$ και $I_n = [\frac{(n-1)(b-a)}{n}, b]$ (και αντίστοιχα για τα $J_j \subseteq [c,d]$).

[2] Έτσι δεν δείχνουμε στον Απειρ. ΙΙΙ ότι κάθε συνεχής συνάρτηση στο $X \times Y$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη;

Κάθε $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ ανήκει σε ακριβώς ένα ορθογώνιο R_{i_x,j_y}, οπότε $|k(x,y) - k(\frac{(i_x-1)(b-a)}{n}, \frac{(j_y-1)(d-c)}{n})| < \epsilon$. Επομένως αν ορίσουμε $a_{i,j} = k(\frac{(i-1)(b-a)}{n}, \frac{(j-1)(d-c)}{n})$ και

$$k_\epsilon = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \chi_{R_{i,j}}$$

τότε

$$|k(x,y) - k_\epsilon(x,y)| = |k(x,y) - a_{i_x,j_y}| < \epsilon\,.$$

Έπεται ότι

$$\sup\{|k(x,y) - k_\epsilon(x,y)| : (x,y) \in X \times Y\} \leq \epsilon\,. \qquad \square$$

Συνοψίζουμε: Έστω $k \in L^2(X \times Y)$. Για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $k_1 \in C(X \times Y)$ ώστε $\|k - k_1\|_{XY} < \epsilon$. Από το Λήμμα 3, υπάρχει $k_\epsilon = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\chi_{R_{i,j}}$ ώστε $\|k - k_\epsilon\|_\infty \leq \epsilon$ και επομένως

$$\|k - k_\epsilon\|_{XY} \leq (b-a)(d-c)\epsilon.$$

Όμως $\chi_{R_{i,j}}(x,y) = \chi_{I_i}(x)\chi_{J_j}(y)$ και συνεπώς (αφού οι χ_{I_i} και χ_{J_j} είναι Riemann-ολοκληρώσιμες)

$$A_{\chi_{R_{i,j}}} = \chi_{I_i}\chi_{J_j}^*$$

από την Παρατήρηση 2. Άρα

$$A_{k_\epsilon} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\chi_{I_i}\chi_{J_j}^*$$

έχει πεπερασμένη τάξη, και τελικά

$$\|A_k - A_{k_\epsilon}\| \leq \|k - k_\epsilon\|_{XY} \leq \|k - k_1\|_{XY} + \|k\_k_\epsilon\|_{XY} < \epsilon + (b-a)(d-c)\epsilon.$$

Παρατήρηση 4. *Δεν είναι εν γένει αλήθεια ότι η $A_k f$ είναι συνεχής, ακόμα κι όταν η f είναι συνεχής.*

Αν για παράδειγμα $k(x,y) = k_1(x)k_2(y)$, τότε $(A_k f)(x) = \int k_1(x)k_2(y)f(y)dy$ δηλαδή $A_k f = \langle f, \bar{k}_2 \rangle\, k_1$, οπότε η $A_k f$ είναι συνεχής αν και μόνον αν η k_1 είναι συνεχής (ή $\langle f, \bar{k}_2 \rangle = 0$).