On the completion of an inner propduct space

Ορισμός 1. *Έστω E χώρος με νόρμα. Μια πλήρωση (completion) του E είναι ένα (F, ϕ) όπου F χώρος Banach και $\phi : E \to F$ γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, δηλ. τ.ω. $\overline{\phi(E)} = F$.*

Πρόταση 1 (Μοναδικότητα). *Η πλήρωση ενός χώρου με νόρμα είναι «ουσιαστικά μοναδική», με την έννοια ότι αν (K, ψ) είναι μια άλλη πλήρωση, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία T από τον F επί του K ώστε $T(\phi(x)) = \psi(x)$ για κάθε $x \in E$.*

$$\begin{tikzcd}
& \phi(E) \arrow[r, tail] \arrow[dd, tail, two heads, dashed] & F = \overline{\phi(E)} \arrow[dd, tail, two heads, "T"] \\
E \arrow[ur, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \\
& \psi(E) \arrow[r, tail] & K = \overline{\psi(E)}
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Η $\phi : E \to \phi(E)$ είναι γραμμική ισομετρία επί, άρα ορίζεται η $\phi^{-1} : \phi(E) \to E$ και είναι γραμμική ισομετρία επί. Συνεπώς η σύνθεση

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(E) \to E \to \psi(E)$$

είναι γραμμική ισομετρία επί. Επομένως επεκτείνεται μοναδικά σε γραμμική και φραγμένη απεικόνιση

$$T : F = \overline{\phi(E)} \to K = \overline{\psi(E)}\,.$$

Η επέκταση αυτή ικανοποιεί εκ κατασκευής, για κάθε $x \in E$,

$$T(\phi(x)) = \psi \circ \phi^{-1}(\phi(x)) = \psi(x)\,.$$

Επίσης, είναι ισομετρία, γιατί αν $y \in F$, επιλέγοντας μια ακολουθία (x_n) από τον E ώστε $y = \lim_n \phi(x_n)$ έχουμε (αφού η T είναι συνεχής)

$$\|T(y)\| = \lim_n \|T(\phi(x_n))\| = \lim_n \|\psi(x_n)\| = \lim_n \|x_n\| = \lim_n \|\phi(x_n)\| = \|y\|$$

γιατί οι ϕ και ψ είναι ισομετρίες.

Τέλος, η T είναι *επί* του K γιατί η εικόνα της είναι κλειστή (: ισομετρική εικόνα πλήρους χώρου) και περιέχει τον $\psi(E)$, που είναι πυκνός υπόχωρος του K. □

Πρόταση 2 (Ύπαρξη). *Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση $\phi : E \to H$ με πυκνή εικόνα.*

Ο χώρος Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ λέγεται η πλήρωση του $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι ο τοπολογικός δυικός

$$E^* = \mathcal{B}(E, \mathbb{C}) := \{f : E \to \mathbb{C} : \text{bounded linear}\}$$

(κάθε χώρου με νόρμα, άρα και) του E είναι πλήρης ως προς τη νόρμα

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in \text{ball}E\}\,.$$

Κατά συνέπεια ο χώρος

$$F := \{g : E \to \mathbb{C} : \text{φραγμένη αντιγραμμική}\}$$

[1] είναι επίσης πλήρης ως προς τη νόρμα

$$\|g\| := \sup\{|g(x)| : x \in \text{ball}E\}\,.$$

Κάθε $x \in E$ ορίζει μια $g_x \in F$ από τη σχέση

$$g_x(y) := \langle x, y\rangle\,,\ y \in E$$

και η απεικόνιση

$$\phi : E \to F : x \mapsto g_x$$

είναι *γραμμική*, και είναι ισομετρία γιατί, για κάθε $x \in E$,

$$\|g_x\| := \sup\{|\langle x, y\rangle| : y \in \text{ball}E\} = \|x\|\ .$$

Επομένως η κλειστή θήκη $H := \overline{\phi(E)}$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach F, και συνεπώς είναι χώρος Banach. Επειδή περιέχει ένα πυκνό ισομετρικό αντίγραφο του E, ο χώρος H (ακριβέστερα, το ζεύγος (H, ϕ)) είναι (μια) πλήρωση του E.

Βεβαίως, το εσωτερικό γινόμενο του E μεταφέρεται στον $\phi(E)$ με τον ορισμό

$$\left\langle g_x, g_y\right\rangle_\phi := \langle x, y\rangle\,, \quad x, y \in E.$$

Ισχυρισμός 1. *Το εσωτερικό γινόμενο*

$$\phi(E) \times \phi(E) \to \mathbb{C} : (g, g') \mapsto \langle g, g'\rangle_\phi$$

επεκτείνεται σε εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ στον $H \times H$ που επάγει τη νόρμα του H, δηλαδή $\|\xi\|^2 = \langle\xi, \xi\rangle_H$ για κάθε $\xi \in H$.

Απόδειξη. Για κάθε $M > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} U_M &= \{(g_1, g_2) \in \phi(E) \times \phi(E) : \|g_1\| < M, \|g_2\| < M\} \\ V_M &= \{(\xi_1, \xi_2) \in H \times H : \|\xi_1\| < M, \|\xi_2\| < M\} \end{aligned}$$

και παρατηρούμε ότι το U_M είναι πυκνό στο V_M. Η απεικόνιση

$$f_M : U_M \to \mathbb{C} : (g_1, g_2) \mapsto \langle g_1, g_2\rangle_\phi$$

είναι *ομοιόμορφα* συνεχής. [2] Πράγματι, αν $h_1, h_2, g_1, g_2 \in U_M$, έχουμε

$$\begin{aligned} |\langle g_1, g_2\rangle_\phi - \langle h_1, h_2\rangle_\phi| &= |\langle g_1 - h_1, g_2\rangle_\phi + \langle h_1, g_2 - h_2\rangle_\phi| \\ &\le \|g_1 - h_1\|\,\|g_2\| + \|h_1\|\,\|g_2 - h_2\| \\ &< \|g_1 - h_1\|\,M + M\,\|g_2 - h_2\|\ . \end{aligned}$$

Συνεπώς η f_M επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε μια συνεχή απεικόνιση $\tilde{f}_M : V_M \to \mathbb{C}$. Όμως, αν $N > M$, παρατηρούμε ότι $f_N|_{U_M} = f_M$. Αφού η επέκταση είναι μοναδική, έπεται ότι $\tilde{f}_N|_{V_M} = \tilde{f}_M$. Έπεται λοιπόν (αφού $H \times H = \bigcup_{M>0} V_M$) ότι υπάρχει μια $\tilde{f} : H \times H \to \mathbb{C}$ που ικανοποιεί $\tilde{f}|_{V_M} = \tilde{f}_M$ για κάθε M. Δηλαδή η $\tilde{f}$ επεκτείνει κάθε f_M, οπότε

$$\tilde{f}(g_1, g_2) = \langle g_1, g_2\rangle_\phi \text{ για κάθε } (g_1, g_2) \in \phi(E) \times \phi(E)\,.$$

[1] μια g είναι αντιγραμμική αν και μόνον αν η $x \to \overline{g(x)}$ είναι γραμμική

[2] ενώ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στον $\phi(E) \times \phi(E)$

Πρέπει να δείξουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον H κι ότι επάγει τη νόρμα του H. Δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι αν $\xi, \eta, \zeta \in H$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\xi + \lambda\eta, \zeta) &= \tilde{f}(\xi, \zeta) + \lambda \tilde{f}(\eta, \zeta) \\ \tilde{f}(\xi, \eta) &= \overline{\tilde{f}(\eta, \xi)} \\ \text{και} \quad \tilde{f}(\xi, \xi) &= \|\xi\|^2 \ . \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $M > 0$ μεγαλύτερο από τα $\|\xi\|, \|\eta\|, \|\zeta\|, \|\xi + \lambda\eta\|$. Τότε οι σχέσεις που θέλουμε να αποδείξουμε γράφονται

$$\begin{aligned} \tilde{f}_M(\xi + \lambda\eta, \zeta) &= \tilde{f}_M(\xi, \zeta) + \lambda \tilde{f}_M(\eta, \zeta) \\ \tilde{f}_M(\xi, \eta) &= \overline{\tilde{f}_M(\eta, \xi)} \\ \text{και} \quad \tilde{f}_M(\xi, \xi) &= \|\xi\|^2 \end{aligned}$$

και άρα έπονται από τις αντίστοιχες ισότητες για την f_M, οι οποίες όμως είναι προφανείς από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου στον $\phi(E)$. □

Αυτό αποδεικνύει ότι η πλήρωση ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert.

Ισχυρισμός 2. *Ο χώρος* H *είναι ίσος με τον χώρο F όλων των φραγμένων αντιγραμμικών μορφών $g : E \to \mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον χώρο E ως πυκνό υπόχωρο της πλήρωσής του, H, που δείξαμε ότι είναι χώρος Hilbert. Κάθε $\eta \in H$ ορίζει μια αντιγραμμική μρφή

$$g_\eta : E \to \mathbb{C} : x \mapsto \langle \eta, x \rangle \ .$$

Η απεικόνιση

$$H \to F : \eta \mapsto g_\eta$$

είναι *γραμμική*: Πράγματι,

$$g_{\eta_1 + \lambda\eta_2}(x) = \langle \eta_1 + \lambda\eta_2, x \rangle = \langle \eta_1, x \rangle + \lambda \langle \eta_2, x \rangle = g_{\eta_1}(x) + \lambda g_{\eta_2}(x)$$

για κάθε $x \in E$. Επίσης, είναι *ισομετρία*, γιατί για κάθε $x \in E$ έχουμε $|g_\eta(x)| = |\langle \eta, x \rangle| \le \|\eta\|\|x\|$ άρα $\|g_\eta\| \le \|\eta\|$ και, επιλέγοντας ακολουθία (y_k) του E ώστε $\|y_k - \eta\| \to 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|g_\eta\| \|y_k\| &\ge |g_\eta(y_k)| \to |g_\eta(\eta)| = \langle \eta, \eta \rangle \\ \text{άρα} \quad \|g_\eta\| \|\eta\| &= \lim_n \|g_\eta\| \|y_n\| \ge \|\eta\|^2 \end{aligned}$$

οπότε $\|g_\eta\| \ge \|\eta\|$ κι έτσι τελικώς $\|g_\eta\| = \|\eta\|$.

Δείχνουμε ότι η $\eta \mapsto g_\eta$ είναι *επί* του F: Αν $g \in F$, δηλαδή η $g : E \to \mathbb{C}$ είναι φραγμένη αντιγραμμική απεικόνιση, τότε επεκτείνεται, λόγω συνέχειας, σε μια μοναδική φραγμένη αντιγραμμική απεικόνιση $\tilde{g} : H \to \mathbb{C}$. Αφού ο H είναι χώρος Hilbert, ξέρουμε απ' το Θεώρημα Riesz (!) ότι υπάρχει μοναδικό $\eta \in H$ ώστε η $\tilde{g}$ να είναι της μορφής $\tilde{g}(\xi) = \langle \eta, \xi \rangle$ για κάθε $\xi \in H$, οπότε για κάθε $x \in E$ έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= \langle \eta, x \rangle = g_\eta(x) \\ \text{δηλαδή} \quad g &= \tilde{g}|_E = g_\eta \, . \end{aligned}$$