Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις IV

Παράδοση: 7/1/2023

1. Έστω $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$ μιγαδικός χώρος Hilbert όπου κάθε υπόχωρος H_n έχει διάσταση $\dim H_n = n$. Για κάθε n έστω $V_n \in \mathcal{B}(H)$ μια μερική ισομετρία με αρχικό και τελικό χώρο H_n. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών, διαφορετικών ανά δύο. Δείξτε ότι για κάθε $x \in H$ η σειρά $y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n V_n x$ συγκλίνει και ορίζει φραγμένο γραμμικό τελεστή $V : x \mapsto y(x) : H \to H$.
Δείξτε ότι ο V διαγωνοποιείται. Για το παράδειγμα που περιγράφεται στο αρχείο `opereta.pdf` βρείτε μια συγκεκριμένη ορθοκανονική βάση του H απο ιδιοδιανύσματα του V (μπορεί να χρειασθούν n-οστές ρίζες της μονάδας).

2. Έστω $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ συμπαγής τελεστής. Δείξτε ότι ο A γράφεται $A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i y_i^*$ όπου $(x_n), (y_n)$ είναι ορθοκανονικές ακολουθίες και (λ_i) είναι μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι το σύνολο $\{\lambda_n\}$ εξαρτάται μοναδικά από τον A. Επομένως η παράσταση $\|A\|_1 := \sum_n \lambda_n$ εξαρτάται μόνον από τον A. Όταν $\|A\|_1 < \infty$, ο A ονομάζεται *τελεστής ίχνους (trace class operator)* ή καμιά φορά *πυρηνικός τελεστής (nuclear operator)*.

3. Δείξτε ότι αν ένας φραγμένος τελεστής A είναι διαγωνοποιήσιμος ως προς μία ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ ενός χώρου Hilbert H τότε οι ιδιοτιμές του είναι ακριβώς οι αριθμοί a_n ώστε $Ae_n = a_n e_n$. Δείξτε επίσης ότι ο ιδιόχωρος M_λ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{e_n : a_n = \lambda\}$, ότι οι ιδιόχωροι αυτοί είναι κάθετοι ανά δύο και παράγουν τον H.

4. Δείξτε ότι κάθε ορθή προβολή σε (διαχωρίσιμο) χώρο Hilbert διαγωνοποιείται.

Δείξτε ότι ένας διαγώνιος τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι προβολή αν-ν (με τους συμβολισμούς της προηγούμενης άσκησης) υπάρχει υποσύνολο $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $a_n = 1$ όταν $n \in \mathbb{M}$ και $a_n = 0$ όταν $n \notin \mathbb{M}$.

5. Έστω H χώρος Hilbert. Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ και $AT = TB$ για κάθε τελεστή $T \in \mathcal{B}(H)$ πεπερασμένης τάξης, να δειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $A = B = \lambda I$.

6. Έστω $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ συμπαγής τελεστής. Δείξτε ότι το $A(\text{ball}\, H_1)$ είναι κλειστό υποσύνολο του H_2. Δείξτε ότι αν ο $A(H_1)$ είναι κλειστός στον H_2 τότε ο A έχει πεπερασμένη τάξη.

7. Δώστε παράδειγμα φραγμένου αυτοσυζυγούς τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ που δεν «πιάνει τη νόρμα του» δηλαδή ικανοποιεί $\|Ax\| < \|A\|$ για κάθε $x \in H$ με $\|x\| = 1$.

8. Θεωρούμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με $T = \begin{bmatrix} P & A \\ A^* & Q \end{bmatrix}$ όπου $A, P, Q \in \mathcal{B}(H)$ και οι P και Q είναι θετικοί. Δείξτε ότι ο T είναι θετικός αν-ν $|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Px, x\rangle.\langle Qy, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H$. Αν $P = Q$ και ο T είναι θετικός, δείξτε ότι $A^*A \leq \|P\|\, P$ και άρα $\|A\| \leq \|P\|$.