Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις Ι

Παράδοση: 23 Οκτωβρίου 2022, πριν τις 18:00

1. Έστω E γραμμικός χώρος και $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ απεικόνιση με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου εκτός της $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο).

Δείξαμε ότι $|\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle|^2 \leq \langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle \langle\!\langle y, y \rangle\!\rangle \quad (x, y \in E)$.

(α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $N = \{x \in E : \langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E.

(β) Στον χώρο πηλίκο E/N, ορίζουμε

$$\langle [x], [y] \rangle = \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle \qquad x, y \in E$$

όπου $[x] = \{x + z : z \in N\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον E/N.

2. Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό. Δείξτε ότι

1) $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
2) $A^\perp = (\overline{\text{span}\, A})^\perp$.
3) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
4) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
5) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.
6) Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $\quad E = E^{\perp\perp}$.
7) Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $\quad E + F$ κλειστός.

3. (α) Εξετάστε αν η γραμμική απεικόνιση $\phi : f \longrightarrow f(\frac{1}{2})$ είναι $\|\cdot\|_2$-συνεχής γραμμική μορφή στον $C([0, 1])$.

(β) Εξετάστε αν η γραμμική μορφή $\psi : f \mapsto \int_{1/2}^{1} f(t)dt$ είναι της μορφής $f \mapsto \langle f, g \rangle$ για κάποια $g \in C([0, 1])$.

4. Έστω $f \in C(\mathbb{R})$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$M_f^o : C_c(\mathbb{R}) \to C_c(\mathbb{R}) : g \mapsto fg$$

(κατά σημείο). Παρατηρείστε ότι είναι καλά ορισμένη και γραμμική. Πότε (δηλ. για ποιές f) ορίζει φραγμένο τελεστή $M_f : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$;

5. Ο χώρος του Hardy H^2 αποτελείται από όλες τις δυναμοσειρές $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ που ικανοποιούν $\sum_k |a_k|^2 < \infty$ (παρατηρείστε ότι μια τέτοια δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για $|z| < 1$).
Αν επίσης $g(z) = \sum_{k=0}^\infty b_k z^k \in H^2$, θέτουμε $\langle f, g \rangle := \sum_{k=0}^\infty a_k \bar{b}_k$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\{\zeta_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ όπου $\zeta_k(z) = z^k, k = 0, 1, \ldots$ είναι ορθοκανονική βάση του H^2. Να συμπεράνετε ότι ο H^2 είναι χώρος Hilbert.

Αν $|w| < 1$, δείξτε ότι η $\phi_w : f \longrightarrow f(w)$ είναι γραμμική μορφή στον H^2 και είναι συνεχής.

Βρείτε την (μοναδική) $k_w \in H^2$ που ικανοποιεί $\langle f, k_w \rangle = \phi_w(f)$ για κάθε $f \in H^2$.

6. Αν $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ (όπου $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$) είναι μια συνάρτηση (μια δυναμοσειρά, ίσως;) εξετάστε πότε η απεικόνιση $f \to fh$ απεικονιζει τον H^2 στον H^2 και πότε ορίζει φραγμένο τελεστή.

7. Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$\Theta_{u,v} : E \to \mathbb{C} \to F : x \mapsto \langle x, u \rangle \mapsto \langle x, u \rangle v$$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$\Theta_{u,v} = vu^* = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

• Βρείτε τον συζυγή της απεικόνισης $E \to \mathbb{C} : x \mapsto \langle x, u \rangle$. Δείξτε ότι ο συζυγής του vu^* είναι ο $(vu^*)^* = uv^*$.

• Βρείτε τη σύνθεση $(vu^*) \circ (wz^*)$ (όταν ορίζεται). Πότε είναι =0;

• Όταν οι E, F είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, δείξτε ότι κάθε $T \in \mathcal{L}(E, F)$ γράφεται $T = \sum_{k=1}^{N} s_k v_k u_k^*$ όπου $s_k > 0,\ u_k \in E, v_k \in F$.

• Δείξτε ότι μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια $\{u_1, \ldots, u_N\}$ ορθοκανονική στον E, ή την $\{v_1, \ldots, v_N\}$ ορθοκανονική στον F.

• Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές με $N \leq \min(\dim E, \dim F)$;

8. Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, ορίζουμε $\hat{f}(n) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}$.

Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{F}_0 : (C([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_2) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2) : f \mapsto (\hat{f}(n))_n$$

επεκτείνεται σε (γραμμική) ισομετρία από τον $L^2([-\pi, \pi])$ επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Αν $f \in C([-\pi, \pi])$, βρείτε τον πίνακα που αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστικό τελεστή M_f ως προς την ορθοκανονική βάση $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ του $L^2([-\pi, \pi])$ (όπου $f_n(t) = e^{int},\ t \in [-\pi, \pi]$).

9. Δείξτε ότι ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $A = [a_{ij}]$ μιγαδικών αριθμών ορίζει γραμμική απεικόνιση $T_A : c_{00}(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων αν και μόνον αν οι στήλες του είναι τετραγωνικά αθροίσιμες. Δείξτε ότι η T_A είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $T : c_{00}(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ που ικανοποιεί $\langle Te_j, e_i \rangle = a_{ij}$ για κάθε $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

Δείξτε ότι αν ο $A = [a_{ij}]$ έχει την ιδιότητα: «$\exists N \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{ij} = 0$ για κάθε $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ με $i > N$ ή $j > N$», τότε επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$.

Δώστε χαρακτηρισμό των πινάκων A για τους οποίους ο T_A αφήνει τον $c_{00}(\mathbb{N})$ αναλλοίωτο, δηλαδή $T_A(c_{00}(\mathbb{N})) \subseteq c_{00}(\mathbb{N})$. Είναι αλήθεια ότι τότε ο T_A επεκτείνεται συνεχώς στον $\ell^2(\mathbb{N})$;

10. Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, δείξτε ότι η απεικόνιση

$$E \times E \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, αλλά ο περιορισμός της σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του $E \times E$ *είναι* ομοιόμορφα συνεχής.