Γραμμικοί Τελεστές
Μερικά Σχόλια στις Ασκήσεις Ι

6. *Αν $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ (όπου $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$) είναι μια συνάρτηση (μια δυναμοσειρά, ίσως;) εξετάστε πότε η απεικόνιση $f \to hf$ απεικονίζει τον H^2 στον H^2 και πότε ορίζει φραγμένο τελεστή.*

Παρατήρηση Έστω $f \in H^2$, με $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Για κάθε $r \in (0,1)$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_r : \mathbb{T} \to \mathbb{C} : e^{it} \mapsto f(re^{it})$$

δηλαδή

$$f_r(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ikt}\,.$$

Η f_r είναι βεβαίως συνεχής και

$$\|f_r\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \int_0^{2\pi} |f_r(e^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k r^k|^2$$

από την ισότητα Parseval. Έχουμε, για κάθε $r \in (0,1)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k r^k|^2 \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$$

$$\text{άρα} \quad \sup_{r\in(0,1)} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k r^k|^2 \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$$

και στην πραγματικότητα ισχύει ισότητα

$$\sup_{r\in(0,1)} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k r^k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$$

όπως μαθαίνουμε στον Απειροστικό.[1] Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\sup_{r\in(0,1)} \int_0^{2\pi} |f_r(e^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = \|f\|^2_{H^2}$$

ή με άλλα λόγια ότι

Η νόρμα μιας $f \in H^2$ δίνεται από τον τύπο

$$\|f\|^2_{H^2} = \sup_{r\in(0,1)} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi} \right\}. \qquad (*)$$

[1] Αν $a = (a_n)$, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{k=0}^{N} |a_k|^2 > \|a\|_2^2 - \epsilon$. Επειδή $r^k \nearrow 1$ για $k = 0, \dots, 2N$ καθώς $r \nearrow 1$, έχουμε $\sum_{k=0}^{N} |a_k|^2 r^{2k} \nearrow \sum_{k=0}^{N} |a_k|^2$. Υπάρχει λοιπόν $r_0 \in (0,1)$ ώστε $\sum_{k=0}^{N} |a_k|^2 r_0^{2k} > \sum_{k=0}^{N} |a_k|^2 - \epsilon$ οπότε $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r_0^{2k} > \|a\|_2^2 - 2\epsilon$. Συνεπώς $\sup_{r\in(0,1)} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k r^k|^2 \ge \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r_0^{2k} > \|a\|_2^2 - 2\epsilon$.

Ερχόμαστε τώρα στην Άσκηση. Αν η απεικόνιση $f \to hf$ στέλνει τον H^2 στον εαυτό του, τότε θα στέλνει τη σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$ σε στοιχείο του H^2, άρα $h = h\mathbf{1} \in H^2$. Βρήκαμε λοιπόν

Αναγκαία συνθήκη ώστε να έχουμε $hf \in H^2$ για κάθε $f \in H^2$ είναι η συνθήκη $h \in H^2$.

Η συνθήκη αυτή όμως δεν είναι ικανή. Για παράδειγμα, αν $h(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$, τότε $h \in H^2$ αλλά $h^2 \notin H^2$. (Άσκηση: Η συνέλιξη της ακολουθίας $(\frac{1}{n})$ με τον εαυτό της δεν είναι τετραγωνικά αθροίσιμη!).

Παρατηρούμε όμως ότι, αν η h είναι ολόμορφη και φραγμένη στον δίσκο $\mathbb{D}$, τότε ορίζει φραγμένο τελεστή

$$T_h : H^2 \to H^2 : f \mapsto hf\,.$$

Πράγματι, για κάθε $f \in H^2$, η συνάρτηση hf είναι ολόμορφη (οπότε έχει δυναμοσειρά που συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{D}$). Επίσης, αν $r \in (0,1)$ έχουμε

$$\int_0^{2\pi} |h(re^{it})f(re^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi} \le \sup_{t\in[0,2\pi]} |h(re^{it})|^2 \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi} \le \sup_{z\in\mathbb{D}} |h(z)|^2 \|f\|_{H^2}^2$$

επομένως, χρησιμοποιώντας και την (*), έχουμε

$$\|hf\|_{H^2}^2 = \sup_{r\in(0,1)} \left\{ \int_0^{2\pi} |(hf)(re^{it})|^2 \frac{dt}{2\pi} \right\} \le \sup_{z\in\mathbb{D}} |h(z)|^2 \|f\|_{H^2}^2$$

το οποίο δείχνει ότι η hf ανήκει στον H^2, δηλ. ο T_h είναι καλά ορισμένος, και είναι φραγμένος με

$$\|T_h\| \le \sup_{z\in\mathbb{D}} |h(z)| := \|h\|_{\mathbb{D}}\,.$$

Δείξαμε την μια κατεύθυνση του χαρακτηρισμού

> *Μια συνάρτηση $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ορίζει φραγμένο τελεστή $T_h : H^2 \to H^2 : f \mapsto hf$ αν και μόνον αν είναι ολόμορφη και φραγμένη στον δίσκο. Μάλιστα $\|T_h\| = \|h\|_{\mathbb{D}}$.*

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι, αν ο τελεστής $T_h : H^2 \to H^2 : f \mapsto hf$ είναι καλά ορισμένος και φραγμένος, τότε η h είναι (ολόμορφη και) φραγμένη στον δίσκο, με $\|h\|_{\mathbb{D}} \le \|T_h\|$.

Ότι η h είναι ολόμορφη (μάλιστα, $h \in H^2$) είναι φανερό, αφού $h = T_h(\mathbf{1}) \in H^2$.

Μπορούμε φυσικά να υποθέσουμε ότι $\|T_h\| = 1$. Έπεται ότι $\|h\|_{H^2} = \|T_h(\mathbf{1})\|_{H^2} \le 1$, επομένως $\|h^2\|_{H^2} = \|T_h(h)\|_{H^2} \le \|h\|_{H^2} \le 1$ και με επαγωγή έχουμε $\|h^n\|_{H^2} \le 1$ για κάθε n.

Θα δείξουμε ότι $|h(w)| \le 1$ για κάθε $w \in \mathbb{D}$. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει, οπότε υπάρχει $\epsilon > 0$ και $w \in \mathbb{D}$ ώστε $|h(w)| \ge 1 + \epsilon$. Λόγω συνέχειας της h, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του w ώστε $|h(z)| \ge 1 + \epsilon$ για κάθε $z \in V$. Θέτουμε $r = |w| < 1$ και θεωρούμε τον κύκλο $C_r := \{z \in \mathbb{D} : |z| = r\}$. Το σύνολο $E := C_r \cap V$ είναι ένα τόξο $E = \{re^{it} : t \in (a,b)\} \subseteq C_r$, και $|h(re^{it})| \ge 1 + \epsilon$ για κάθε $t \in (a,b)$.

Για κάθε n έχουμε λοιπόν

$$1 \ge \|h^n\|_{H^2}^2 \ge \|(h_r)^n\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \int_0^{2\pi} |h_r(e^{it})|^{2n} \frac{dt}{2\pi} \ge \int_a^b |h(re^{it})|^{2n} \frac{dt}{2\pi} \ge (1+\epsilon)^{2n} \frac{b-a}{2\pi}$$

άτοπο. □

7. *Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση*

$$\Theta_{u,v} = vu^* : E \to \mathbb{C} \to F : x \mapsto \langle x, u\rangle \mapsto \langle x, u\rangle v$$

(Δείξαμε ότι ο συζυγής του vu^* είναι ο $(vu^*)^* = uv^*$, και ότι η σύνθεση $(vu^*) \circ (wz^*) = \langle w, u\rangle vz^*$.)

• *Όταν οι E, F είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, δείξτε ότι κάθε $T \in \mathcal{L}(E, F)$ γράφεται $T = \sum_{k=1}^N s_k v_k u_k^*$ όπου $s_k \geq 0,\ u_k \in E, v_k \in F$.*

Λύση Για οποιεσδήποτε (ορθοκανονικές ή μη) βάσεις $\{e_j : j \in [m]\}$ του E και $\{f_i : i \in [n]\}$ του F η οικογένεια

$$\{f_i e_j^* : (i, j) \in [n] \times [m]\}$$

είναι βάση του χώρου $\mathcal{L}(E, F)$.

Πράγματι, είναι γραμμικά ανεξάρτητη: αν $\sum\limits_{i,j} \lambda_{ij} f_i e_j^* = 0$ τότε για κάθε $k \in [m]$ έχουμε

$$0 = \left(\sum_{i,j} \lambda_{ij} f_i e_j^*\right)(e_k) = \sum_j \lambda_{ik} f_i$$

άρα $\lambda_{ik} = 0$ για κάθε $i \in [n]$ αφού τα $\{f_i\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε $k \in [m]$ έχουμε $\lambda_{ik} = 0$ για κάθε $(i, k) \in [n] \times [m]$.

• Επίσης, κάθε $T \in \mathcal{L}(E, F)$ γράφεται (μοναδικά)

$$T = \sum_{i\in[m]} \sum_{j\in[n]} a_{ij} f_i e_j^* \qquad (*)$$

όπου $a_{ij} = \langle Te_j, f_i\rangle$. Πράγματι, για κάθε $x \in E$ έχουμε ,

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{j\in[m]} \langle x, e_j\rangle Te_j \\ \text{αλλά}\quad Te_j &= \sum_{i\in[n]} \langle Te_j, f_i\rangle f_i \ \text{ αφού } Te_j \in F, \\ \text{άρα}\quad T(x) &= \sum_{j\in[m]} \langle x, e_j\rangle \sum_{i\in[n]} \langle Te_j, f_i\rangle f_i \\ &= \sum_{i,j} \langle Te_j, f_i\rangle\langle x, e_j\rangle f_i = \left(\sum_{i,j} a_{ij} f_i e_j^*\right)(x) \end{aligned}$$

Η έκφραση (*) δεν είναι πολύ ενδιαφέρουσα, αφού το πλήθος των όρων μπορεί να είναι nm, ενώ η τάξη του T είναι το πολύ min$\{n, m\}$.

• *Δείξτε ότι μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια $\{u_1, \ldots, u_N\}$ ορθοκανονική στον E, ή την $\{v_1, \ldots, v_N\}$ ορθοκανονική στον F.*

Λύση Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο:

• Για *κάθε* ορθοκανονική βάση $\{e_j : j \in [m]\}$ του E, υπάρχουν $u_j \in F$ ώστε

$$T = \sum_{j\in[m]} u_j e_j^*.$$

Πράγματι για κάθε $x \in E$,

$$T(x) = \sum_{j\in[m]} \langle x, e_j\rangle Te_j = \sum_{j\in[m]} (u_j e_j^*)(x)$$

όπου $u_j = Te_j$.

Παρατήρηση (Αλ.Κ.) Αν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_N\}$ του $(\ker T)^\perp$ και την επεκτείνουμε σε ορθοκανονική βάση E, τότε η προηγούμενη ισότητα γίνεται

$$T = \sum_{j\in[N]} u_j e_j^* \tag{**}$$

και επιπλέον τα $u_j = Te_j, i \in [N]$ είναι *γραμμικά ανεξάρτητα*, γιατί ο περιορισμός του T στο $(\ker T)^\perp$ is 1-1.

Επίσης,

• Για *κάθε* ορθοκανονική βάση $\{f_i : i \in [n]\}$ του F, υπάρχουν $v_i \in E$ ώστε

$$T = \sum_{i\in[n]} f_i v_i^*.$$

Πράγματι, εφαρμόζοντας το προηγούμενο στον $T^* : F \to E$ έχουμε

$$T^* = \sum_{i\in[n]} v_i f_i^*$$

όπου $v_i = T^* f_i$. Συνεπώς

$$T = \sum_{i\in[n]} f_i v_i^* \,.$$

• *Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές με το πλήθος N των μη μηδενικών όρων να είναι $N \le \min(\dim E, \dim F)$;*

Παρατήρηση (Αλ.Κ.) Μια αναγκαία, και ικανή, συνθήκη: Αν $T = \sum\limits_{k=1}^{M} s_k v_k u_k^*$ και η οικογένεια $\{u_k\}$ είναι ορθοκανονική, τότε για κάθε $j \in [M]$,

$$T(u_j) = s_j v_j \,.$$

Επομένως, αν και τα v_k είναι ορθοκανονικά, εφόσον $s_j \ge 0$, πρέπει να *επιλέξουμε την ορθοκανονική οικογένεια $\{u_k\}$ έτσι ώστε τα διανύσματα Tu_k να είναι ανά δύο κάθετα.*

Και αντίστροφα, αν *υπάρχει* ορθοκανονική οικογένεια $\{u_k\}$ έτσι ώστε τα Tu_k να είναι ανά δύο κάθετα, τότε ορίζοντας $s_k = \|Tu_k\|$ και αριθμώντας ώστε $s_k \neq 0$ για $k = 1, \ldots, N$, αν θέσουμε $v_k = \frac{Tu_k}{\|Tu_k\|}$ για $k = 1, \ldots, N$ έχουμε μια ορθοκανονική οικογένεια $\{v_k : k = 1, \ldots, N\}$ τέτοια ώστε

$$T = \sum_{k=1}^{N} s_k v_k u_k^* \,.$$

Πράγματι, για κάθε $x \in E$,

$$Tx = \sum_{j\in[N]} \langle x, u_j\rangle Tu_j = \sum_{j\in[N]} \langle x, u_j\rangle s_j v_j = \sum_{j\in[N]} s_j (v_j u_j^*)(x) \,.$$

• *Είναι πάντα δυνατό να επιλέξουμε μια ορθοκανονική οικογένεια $\{u_k\}$ που να ικανοποιεί την απαίτηση, τα Tu_k να είναι ανά δύο κάθετα;*

Απάντηση: ΝΑΙ!

Απόδειξη Για κάθε ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_m\}$ του E, αν γράψουμε $T = \sum_{j\in[m]} u_j e_j^*$ με $u_j = Te_j$ έχουμε

$$\begin{aligned} T^*T &= (\sum_{j\in[m]} e_j u_j^*)(\sum_{k\in[m]} u_k e_k^*) = \sum_{i,j} \langle u_i, u_j\rangle e_j e_i^* \\ &= \sum_{j,k} \langle Te_i, Te_j\rangle e_j e_i^* = \langle T^*Te_i, e_j\rangle e_j e_i^* \,. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο $T^*T : E \to E$ είναι *αυτοσυζυγής τελεστής σε (μιγαδικό) χώρο Hilbert πεπερασμένης διάστασης*. Επομένως, από το Φασματικό Θεώρημα (!) *υπάρχει* μια ορθοκανονική βάση του E που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T^*T, δηλαδή $T^*Te_j = \lambda_j e_j$ για κάποιους αριθμούς λ_j, που είναι μη αρνητικοί γιατί $\lambda_j = \langle T^*Te_j, e_j\rangle = \|Te_j\|^2$. Επιπλέον, η τελευταία ισότητα δείχνει ότι $\lambda_j = 0$ αν-ν $Te_j = 0$, δηλαδή αν-ν $e_j \in \ker T$. Έχουμε λοιπόν

$$\langle Te_i, Te_j\rangle = \langle T^*Te_i, e_j\rangle = \lambda_i\langle e_i, e_j\rangle = \lambda_i\delta_{ij}$$

πράγμα που δείχνει ότι τα διανύσματα $\{Te_j : j \in [m]\}$ είναι ανά δύο κάθετα, και $Te_j \neq 0$ αν-ν $e_j \notin \ker T$ δηλαδη αν-ν $j \in [N]$ -δες την (**).

Επομένως αν θέσουμε $f_j := \frac{1}{s_j}Te_j$ για $j \in [N]$ έχουμε τελειώσει:

$$T = \sum_{k=1}^{N} s_k f_k e_k^* .$$