Ο Συναρτησιακός Λογισμός

1. Εισαγωγή Ο στόχος είναι, αν $A \in \mathcal{B}(H)$, να ορίσουμε τελεστές $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ για κατάλληλες συναρτήσεις f.

Δύο προσεγγίσεις στο πρόβλημα αυτό είναι οι ακόλουθες:

(α) Αν η f είναι μιγαδικό *πολυώνυμο*, της μορφής $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$, θέτουμε

$$f(A) := \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

(όπου $A^0 = I$). Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $f \to f(A)$ διατηρεί άθροισμα και γινόμενο.

(β) Αν ο A είναι *αυτοσυζυγής* (ή γενικότερα φυσιολογικός) τελεστής και ο χώρος H έχει *πεπερασμένη διάσταση*, τότε ο A διαγωνοποιείται, δηλαδή

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$$

όπου P_λ είναι η προβολή στον ιδιόχωρο M_λ του A: οι προβολές $\{P_\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ είναι κάθετες ανά δύο και έχουν άθροισμα $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda = I_H$. Τότε, *για κάθε συνάρτηση* $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ μπορούμε να ορίσουμε

$$A_f := \sum_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) P_\lambda \,.$$

Ισοδύναμα, αν διαγωνοποιήσουμε τον A ως προς μια ορθοκανονική βάση του H από ιδιοδιανύσματα του A, τότε ο A θα έχει διαγώνιο πίνακα

$$A \sim \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)\,,$$

ο τελεστής A_f είναι αυτός που έχει πίνακα ως προς την ίδια ορθοκανονική βάση τον

$$A_f \sim \text{diag}(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))\,.$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση (α) ο τελεστής (και ο χώρος) είναι αυθαίρετος ενώ η f περιορίζεται στα πολυώνυμα, ενώ αντίθετα στην περίπτωση (β) η f είναι αυθαίρετη ενώ ο A περιορίζεται στους φυσιολογικούς τελεστές σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Οι δύο αυτές διαδικασίες, παρότι ξεκινούν από διαφορετικές προσεγγίσεις, *στην ειδική περίπτωση που ο A είναι φυσιολογικός τελεστής σε χώρο πεπερασμένης διάστασης και η f είναι πολυώνυμο*, δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα:

$$f(A) = A_f$$

Πράγματι, έχουμε

$$A^2 = A \left(\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda A P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^2 P_\lambda$$

και επαγωγικά $A^m = \sum\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda_n^m P_\lambda$. Λόγω γραμμικότητας, έπεται ότι αν $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$, τότε $A_f = \sum\limits_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) P_\lambda = f(A)$.

2. Προκαταρκτικά Σταθεροποιούμε μια φραγμένη ακολουθία $\lambda = \{\lambda_n\}$ και μια ακολουθία κάθετων ανά δύο μη μηδενικών προβολών $\{P_n\}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $x \in H$, η σειρά $\sum_n \lambda_n P_n x$ συγκλίνει στον H και

$$\|\sum_n \lambda_n P_n x\| \leq \|\lambda\|_\infty \|x\|$$

όπου $\|\lambda\|_\infty = \sup_n |\lambda_n|$.

Απόδειξη Θυμίζουμε ότι αφού οι P_n είναι ανά δύο κάθετες, έχουμε $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$. Επομένως για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n>N_0} \|P_n x\|^2 < \epsilon^2$. Θέτουμε $y_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n P_n x$. Αν $M > N \geq N_0$,

$$\begin{aligned}\|y_M - y_N\|^2 = \left\|\sum_{n=N+1}^{M} \lambda_n P_n x\right\|^2 &\overset{(p)}{=} \sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2 \\ &\leq \|\lambda\|_\infty^2 \sum_{n>N_0} \|P_n x\|^2 < \|\lambda\|_\infty^2 \epsilon^2\end{aligned}$$

όπου η ισότητα (p) οφείλεται στο Πυθαγόρειο Θεώρημα. Επομένως η ακολουθία (y_n) είναι βασική, άρα συγκλίνει, και επειδή

$$\|y_n\|^2 \leq \|\lambda\|_\infty^2 \sum_{n=1^N} \|P_n x\|^2 \leq \|\lambda\|_\infty^2 \|x\|^2$$

για κάθε N, έχουμε και

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x\|^2 \leq \|\lambda\|_\infty^2 \|x\|^2 .$$

$\square$

Παρατήρηση. Αν η ακολουθία (λ_n) δεν είναι φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_n \lambda_n P_n x$ δεν συγκλίνει για κάθε $x \in H$.

Πράγματι, υπάρχει μια υπακολουθία $(\lambda_{n_k})_k$ ώστε $|\lambda_{n_k}| \geq k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε αν επιλέξουμε για κάθε k ένα $x_k \in P_{n_k}(H)$ με $\|x_k\| = \frac{1}{k}$, θέτοντας $x = \sum_k x_k$ (είναι καλά ορισμένο γιατί $\sum_k \|x_k\|^2 < \infty$), για κάθε $K \in \mathbb{N}$ έχουμε (εφόσον $N_K \geq K$ και $P_{n_k} x = x_k$ ενώ $P_n x = 0$ όταν $n \notin \{n_k\}$)

$$\begin{aligned}\|y_{N_K}\|^2 = \sum_{n=1}^{N_K} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2 &= \sum_{k=1}^{K} |\lambda_{n_k}|^2 \|P_{n_k} x\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{K} |\lambda_{n_k}|^2 \|x_k\|^2 \geq K^3\end{aligned}$$

οπότε η (y_n) δεν συγκλίνει, αφού δεν είναι φραγμένη.

Όταν η $\lambda = \{\lambda_n\}$ είναι φραγμένη, ορίζεται μια απεικόνιση

$$B_\lambda : H \to H : x \mapsto \sum_n \lambda_n P_n x$$

η οποία είναι γραμμική, γιατί είναι το κατά σημείο όριο των γραμμικών απεικονίσεων $B_N : x \to \sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n P_n x$. Μάλιστα είναι φραγμένη, καθώς από τον Ισχυρισμό έχουμε

$$\begin{aligned}&\|\sum_n \lambda_n P_n x\| \leq \|\lambda\|_\infty \|x\| \quad \text{για κάθε } x \in H \\ &\text{άρα} \quad \|B_\lambda\| \leq \|\lambda\|_\infty .\end{aligned}$$

Στην πραγματικότητα έχουμε ισότητα, γιατί για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $x_m \in P_m(H)$ νόρμας 1 έχουμε $B_\lambda x_m = \lambda_m x_m$ οπότε

$$|\lambda_m| = |\lambda_m| \, \|x_m\| = \|B_\lambda x_m\| \leq \|B_\lambda\|$$

άρα $\sup_m |\lambda_m| \leq \|B_\lambda\|$.

Παρατηρούμε τέλος ότι η σειρά $\sum_n \bar{\lambda}_n P_n x$ συγκλίνει για κάθε $x \in H$ (αφού η $\{\bar{\lambda}_n\}$ είναι φραγμένη), και για κάθε $x, y \in H$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle B_\lambda^* x, y\rangle &= \langle x, B_\lambda y\rangle = \langle x, \sum_n \lambda_n P_n y\rangle = \sum_n \bar{\lambda}_n \langle x, P_n y\rangle \\
&= \sum_n \bar{\lambda}_n \langle P_n x, y\rangle = \langle \sum_n \bar{\lambda}_n P_n x, y\rangle
\end{aligned}$$

και συνεπώς $B_\lambda^*(x) = \sum_n \bar{\lambda}_n P_n x$ για κάθε $x \in H$.

Δείξαμε λοιπόν την ακόλουθη

Πρόταση 1 *Αν $\lambda = \{\lambda_n\}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία και $\{P_n\}$ μια ακολουθία κάθετων ανά δύο μη μηδενικών προβολών σ ένα χώρο Hilbert, ορίζεται ένας φραγμένος φυσιολογικός τελεστής απο τη σχέση $B_\lambda(x) = \sum_n \lambda_n P_n x$ με νόρμα $\|B_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty$.*
Ο τελεστής B_λ είναι φυσιολογικός και $B_\lambda^*(x) = \sum_n \bar{\lambda}_n P_n x$ για κάθε $x \in H$.

3. Ο Συναρτησιακός Λογισμός για συμπαγείς φυσιολογικούς τελεστές

Πρόταση 2 *Έστω $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ η φασματική ανάλυση ενός συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή A, όπου $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αρίθμηση του $\sigma_p(A)$ και $P_n = P(M_{\lambda_n})$.*
Αν $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε

$$A_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x \quad \text{για κάθε } \ x \in H.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή $A_f \in \mathcal{B}(H)$ με νόρμα

$$\|A_f\| = \|f\|_{\sigma_p(A)} := \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(A)\}\,.$$

*Η απεικόνιση $f \to A_f$ (ο **συναρτησιακός λογισμός - functional calculus**) διατηρεί άθροισμα και γινόμενο:*

$$A_{f+g} = A_f + A_g \quad \text{και} \quad A_{fg} = A_f A_g\,.$$

Όταν η f είναι πολυώνυμο, τότε $A_f = f(A)$.

Παρατήρηση: Ο τελεστής A_f δεν είναι πάντα συμπαγής (για παράδειγμα, αν $f(\lambda) = \lambda$, τότε $A_f = P(\ker A)^\perp$). Όταν όμως η ακολουθία $(f(\lambda_n))$ είναι μηδενική, τότε ο A_f είναι συμπαγής (είναι $\|\cdot\|$-όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης, αφού οι προβολές P_n έχουν πεπερασμένη τάξη όταν $\lambda_n \neq 0$).

Η Απόδειξη είναι άμεση από την πρόταση 1, αφού η ακολουθία $\{f(\lambda_n)\}$ είναι φραγμένη.

Οι ισότητες $A_{f+g} = A_f + A_g$ και $A_{fg} = A_f A_g$ είναι προφανείς, γιατί $((f+g)(\lambda_n)) = (f(\lambda_n)) + (g(\lambda_n))$ και $((fg)(\lambda_n)) = (f(\lambda_n)).((g(\lambda_n))$. Η ισότητα $f(A) = A_f$ για πολυώνυμα έχει αποδειχθεί στην εισαγωγική παράγραφο. □

4. Εφαρμογές

Σταθεροποιούμε στα επόμενα έναν φυσιολογικό συμπαγή τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ με φασματική ανάλυση $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$.

Πρόταση 3 *Αν $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ο τελεστής A_f μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A. Για παράδειγμα, κάθε ιδιόχωρος του A ανάγεται από τον A_f.*

Απόδειξη Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ τελεστής που μετατίθεται με τον A. Έχουμε ήδη δείξει ότι $B(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ για κάθε ιδιόχωρο M_λ του A. Όμως τώρα οι ιδιόχωροι αυτοί είναι ανά δύο κάθετοι και παράγουν τον H. Επομένως ο χώρος $(M_\lambda)^\perp$ παράγεται από τους υπόλοιπους ιδιόχωρους $\{M_\mu : \mu \in \sigma_p(A), \mu \neq \lambda\}$. Αν λοιπόν $x \in (M_\lambda)^\perp$, τότε $x = \sum\limits_{\mu \neq \lambda} P_\mu x$, άρα $Bx = \sum\limits_{\mu \neq \lambda} BP_\mu x$ και κάθε $BP_\mu x$ ανήκει στον M_μ, άρα είναι κάθετο στον M_λ, συνεπώς $Bx \in (M_\lambda)^\perp$.

Συμπέρασμα: ο B ανάγει κάθε ιδιόχωρο M_λ, επομένως μετατίθεται με κάθε φασματική προβολή P_λ.

Έπεται τώρα ότι ο μετατίθεται με κάθε A_f. Πράγματι, για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$BA_f x = B\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) BP_n x = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n Bx = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n\right) Bx = A_f Bx\,.$$

Πρόταση 4 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{K}(H)$ και $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ φραγμένη.*

Ο τελεστής A_f είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $f(\sigma_p(A)) \subseteq \mathbb{R}$ και είναι θετικός αν και μόνον αν $f(\sigma_p(A)) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Απόδειξη Εφόσον ο A είναι αυτοσυζυγής, οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ας θυμηθούμε ότι $A_f^*(x) = \sum_n \overline{f(\lambda_n)} P_n x$ για κάθε $x \in H$.

Αν τώρα η f παίρνει πραγματικές τιμές στο $\sigma_p(A)$, τότε $A_f^*(x) = A_f(x)$ για κάθε x, δηλαδή ο A_f είναι αυτοσυζυγής.

Αντίστροφα αν ο A_f είναι αυτοσυζυγής, τότε οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί οπότε $f(\lambda_n) \in \mathbb{R}$ για κάθε n δηλαδή $f(\sigma_p(A)) \subseteq \mathbb{R}$.

Αν ο A_f είναι θετικός, τότε είναι αυτοσυζυγής, άρα $f(\sigma_p(A)) \subseteq \mathbb{R}$. Επίσης για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$\langle A_f x, x\rangle = \sum_n f(\lambda_n) \langle P_n x, x\rangle$$

οπότε θεωρώντας για καθε n ένα $x \in P_n(H)$ βρίσκουμε $0 \leq \langle A_f x, x\rangle = f(\lambda_n)$, άρα $f(\sigma_p(A)) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Αντίστροφα αν $f(\sigma_p(A)) \subseteq \mathbb{R}_+$ τότε $f(\sigma_p(A)) \subseteq \mathbb{R}$ άρα ο A_f είναι αυτοσυζυγής και οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές, συνεπώς είναι θετικός. □

Πρόταση 5 (Τετραγωνική ρίζα) *Έστω $A \in \mathcal{K}(H)$ θετικός. Τότε ο A έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα που δίνεται από τον τύπο*

$$A^{1/2} = \sum_n \sqrt{\lambda_n} P_n$$

όπου $A = \sum_n \lambda_n P_n$ η φασματική ανάλυση του A.

Απόδειξη Κατ' αρχήν η σειρά $\sum_n \sqrt{\lambda_n} P_n = A_f$ (με $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$) συγκλίνει στη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$ και ορίζει συμπαγή τελεστή, γιατί η $(\sqrt{\lambda_n})$ είναι μηδενική ακολουθία (αφού η (λ_n) είναι μηδενική ακολουθία) και οι $\sqrt{\lambda_n} P_n$ έχουν πεπερασμένη τάξη. Επίσης ο τελεστής αυτός είναι θετικός, γιατί (είναι αυτοσυζυγής και) οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές.

Τέλος, έχουμε $(A_f)^2 = A_{f^2}$ από την Πρόταση 2, επομένως $(A_f)^2 = A$ αφού $f^2(\lambda) = \lambda$ για κάθε λ.

Μένει να δειχθεί η *μοναδικότητα*:

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής που ικανοποιεί $B^2 = A$. Να δείξουμε ότι $B = A_f$ (με $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$).

Παρατηρούμε ότι ο B μετατίθεται με τον A, γιατί $A = B^2$, άρα $AB = B^2B = BB^2 = BA$. Συνεπώς ο B αφήνει αναλλοίωτο κάθε ιδιόχωρο του M_λ του A. Σε κάθε ιδιόχωρο M_λ με $\lambda \neq 0$, ο περιορισμός του B είναι ένας θετικός τελεστής σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, συνεπώς διαγωνοποιείται. Αν $x \in M_\lambda$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του B με $Bx = \mu x$ όπου $\mu \geq 0$, έχουμε

$$\mu^2 \|x\|^2 = \|Bx\|^2 = \langle Bx, Bx\rangle = \langle B^2x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$$

και συνεπώς $\mu = \sqrt{\lambda}$. Συνεπώς ο περιορισμός του B στον M_λ είναι ο $\sqrt{\lambda} I_{M_\lambda}$.

Επίσης στον ιδιόχωρο M_0 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0 ο B βεβαίως μηδενίζεται, αφού ο B^2 μηδενίζεται.

Δηλαδή ο περιορισμός του σε κάθε ιδιόχωρο M_λ ισούται με τον τελεστή $\sqrt{\lambda} I_{M_\lambda}$, που δεν είναι άλλος από τον περιορισμό του τελεστή $\sum_n \sqrt{\lambda_n} P_n$ στον M_λ.

Αφού η κλειστή γραμμική θήκη των ιδιοχώρων του A είναι όλος ο H, δείξαμε ότι ο B ισούται με τον τελεστή $\sum_n \sqrt{\lambda_n} P_n$. □

Σχόλιο Τονίζουμε ότι η υπόθεση $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ δεν εξασφαλίζει ότι ο A είναι θετικός. Για παράδειγμα, ο $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ έχει μη αρνητικό φάσμα ($\sigma(A) = \{0\}$) αλλά δεν είναι θετικός: $\langle Ax, x\rangle = -1$ για $x = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Πόρισμα 6 *Κάθε* αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{K}(H)$ *γράφεται ως διαφορά δύο θετικών τελεστών* $A = A_+ - A_-$ *με την επιπλέον ιδιότητα* $A_+A_- = A_-A_+ = 0$. *Έχουμε μάλιστα* $|A| = A_+ + A_-$.

Απόδειξη Θέτουμε $A_+ = f_+(A)$ και $A_- = f_-(A)$ όπου $f_+(t) = \max\{t, 0\}$ και $f_-(t) = -\min\{t, 0\}$ ($t \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$). Από την Πρόταση 4 οι τελεστές αυτοί είναι θετικοί, αφού οι $f_\pm$ παίρνουν μη αρνητικές τιμές. Οι σχέσεις $A = A_+ - A_-$ και $A_+A_- = A_-A_+ = 0$ προκύπτουν από τον συναρτησιακό λογισμό. Τέλος, $A_+ + A_- = A_f$ όπου $f(t) = f_+(t) + f_-(t) = |t|$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, οπότε $A_f = \sum_n |\lambda_n| P_n$. Έπεται ότι $(A_f)^2 = \sum_n |\lambda_n|^2 P_n = A^2 = A^*A$ άρα ο τελεστής A_f είναι η μοναδική τετραγωνική ρίζα του A^*A, δηλαδή ο $|A|$. □