Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις IV

Παράδοση: 29/5/2022

1. Δείξτε ότι κάθε συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής A γράφεται στη μορφή $A = A_+ - A_-$ όπου οι A_+ και A_- είναι θετικοί τελεστές που ικανοποιούν $A_+A_- = A_-A_+ = 0$ και μετατίθενται με τον A και μεταξύ τους. Δείξτε επίσης ότι $|A| = A_+ + A_-$.

2. Έστω $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ συμπαγής τελεστής. Δείξαμε ότι ο A γράφεται $A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i y_i^*$ όπου $(x_n), (y_n)$ είναι ορθοκανονικές ακολουθίες και (λ_i) είναι μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι το σύνολο $\{\lambda_n\}$ εξαρτάται μοναδικά από τον A. Επομένως η παράσταση $\|A\|_1 := \sum_n \lambda_n$ εξαρτάται μόνον από τον A. Όταν $\|A\|_1 < \infty$, ο A ονομάζεται *τελεστής ίχνους (trace class operator)* ή καμιά φορά *πυρηνικός τελεστής (nuclear operator)*.

3. Δείξτε ότι αν ένας φραγμένος τελεστής A είναι διαγωνοποιήσιμος ως προς μία ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ ενός χώρου Hilbert H τότε οι ιδιοτιμές του είναι ακριβώς οι αριθμοί a_n ώστε $Ae_n = a_n e_n$. Δείξτε επίσης ότι ο ιδιόχωρος M_λ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{e_n : a_n = \lambda\}$, ότι οι ιδιόχωροι αυτοί είναι κάθετοι ανά δυο και παράγουν τον H.

4. Έστω H χώρος Hilbert. Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ και $AT = TB$ για κάθε τελεστή $T \in \mathcal{B}(H)$ πεπερασμένης τάξης, να δειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $A = B = \lambda I$.

5. Δείξτε ότι κάθε ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής: Αν $k \in C([a,b] \times [a,b])$, ο τελεστής $A_k \in \mathcal{B}(L^2[a,b])$ με

$$(A_k f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy, \quad f \in C([a,b])$$

είναι συμπαγής.

[Προαιρετικά: Το ίδιο ισχύει όταν $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$.]

6. Δώστε παράδειγμα φραγμένου αυτοσυζυγούς τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ που δεν «πιάνει τη νόρμα του» δηλαδή ικανοποιεί $\|Ax\| < \|A\|$ για κάθε $x \in H$ με $\|x\| = 1$.