Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις III

Παράδοση: 3/5/2022

1. Αν P, Q είναι δύο ορθές προβολές σ' έναν χώρο Hilbert, δείξτε ότι

(α) ισχύει η ισοδυναμία
$(P \vee Q) + (P \wedge Q) = P + Q \iff PQ = QP.$

(β) ο τελεστής $P - Q$ είναι θετικός αν και μόνον αν είναι προβολή.

2. Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ έχει πολική αναπαράσταση $T = V|T|$ με $\ker V = \ker T$ δείξτε ότι $V|T|V^* = |T^*|$. Είναι αλήθεια ότι υπάρχει *unitary* $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ώστε $U|T|U^* = |T^*|$;

3. Διατυπώστε και αποδείξτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το γινόμενο (: η σύνθεση) δυο μη μηδενικών μερικών ισομετριών να είναι μη μηδενική μερική ισομετρία.

4. Έστω H χώρος Hilbert και $V, P \in \mathcal{B}(H)$ όπου V ισομετρία και P προβολή. Να δειχθεί ότι

$$VP = PVP \iff P = V^*PVP.$$

5. Έστω $A = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k^*$ όπου οι οικογένειες$\{x_k\}$ και $\{y_k\}$ είναι ορθοκανονικές. Προφανώς $\|A\| \leq \sum_k |\lambda_k|$. Βρείτε ένα μια καλύτερο φράγμα για την $\|A\|$. [Υπόδειξη: τι συμβαίνει όταν $x_k = y_k = e_k$;] Δείξτε ότι το άνω φράγμα που βρήκατε είναι ισότητα.

6. (α) Αποδείξτε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Hilbert H υπάρχει κλειστό και φραγμένο σύνολο που δεν είναι συμπαγές.

(β) Δείξτε ότι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο $C \subseteq \ell^2$ είναι συμπαγές αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάχει n_ϵ ώστε *για κάθε* $x = (x(k)) \in C$ να έχουμε $\sum\limits_{k > n_\epsilon} |x(k)|^2 < \epsilon^2$.

(γ) Έστω $u = (u(n)) \in \ell^2$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$C_u := \{x = (x(k)) \in \ell^2 : |x(k)| \leq |u(k)| \text{ για κάθε } k\}$$

είναι συμπαγές.

7. Αν $K \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής τελεστής, δείξτε ότι κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί $|\langle Ax, y\rangle| \leq |\langle Kx, y\rangle|$ για κάθε $x, y \in H$ είναι επίσης συμπαγής. Ειδικότερα αν επιπλέον $K \in \mathcal{B}_+(H)$, κάθε $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $-K \leq A \leq K$ είναι συμπαγής.

8. Έστω $K \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ είναι συμπαγής τελεστής.

(α) Αν οι $A_n, A \in \mathcal{B}(H_2)$ ικανοποιούν $A_n y \to Ay$ για κάθε $y \in H_2$, δείξτε ότι $\|A_n K - AK\| \to 0$.

(β) Δείξτε ότι το ανάλογο του (α) «από τα δεξιά» δεν ισχύει : δώστε παράδειγμα ακολουθίας (B_n) στον $\mathcal{B}(H_1)$ που ικανοποιεί $B_n x \to 0$ για κάθε $x \in H_1$, αλλά δεν ικανοποιεί $\|KB_n\| \to 0$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) και μια ορθοκανονική βάση στον χώρο $\mathrm{im}K$ (θεωρώντας γνωστό ότι ο $\mathrm{im}K$ είναι πάντα διαχωρίσιμος), δώστε μια άλλη απόδειξη ότι ο K προσεγγίζεται από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης.