Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις Ι

Παράδοση: 20 Μαρτίου 2022

1. Έστω E γραμμικός χώρος και $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ απεικόνιση με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου εκτός της $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο).

Δείξαμε ότι $|\langle\langle x, y \rangle\rangle|^2 \leq \langle\langle x, x \rangle\rangle \langle\langle y, y \rangle\rangle \quad (x, y \in E)$.

(α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $N = \{x \in E : \langle\langle x, x \rangle\rangle = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E.

(β) Στον χώρο πηλίκο E/N, ορίζουμε

$$\langle [x], [y] \rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle \qquad x, y \in E$$

όπου $[x] = \{x + z : z \in N\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον E/N.

2. Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό. Δείξτε ότι

1) $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
2) $A^\perp = (\overline{\text{span}\, A})^\perp$.
3) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
4) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
5) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.
6) Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $\quad E = E^{\perp\perp}$.
7) Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $\quad E + F$ κλειστός.

3. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Δείξτε ότι

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \text{dist}(x, K)^2$$

όπου $K = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

4. Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον χώρο Hilbert H.

(α) Αν $M = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$, δείξτε ότι $P_M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k$ για κάθε $x \in H$.

(β) Αν η $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική *βάση* του H, δείξτε ότι κάθε $y \in H$ ανήκει στην κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου

$$\{y_n : \langle y, y_n \rangle \neq 0\}.$$

5. Εξετάστε αν η γραμμική απεικόνιση $\phi : f \longrightarrow f(\frac{1}{2})$ είναι $\|\cdot\|_2$-συνεχής γραμμική μορφή στον $C([0, 1])$.

6. Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $f \in C([0, 1])$ να ισχύει η ανισότητα

$$\left| \int_0^1 t f(t) dt \right| \leq C \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Βρείτε την βέλτιστη (δηλ. την μικρότερη δυνατή) τιμή της C.

7. Στον χώρο $M_n = M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ πινάκων, ορίζουμε

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(B^*A),\ A, B \in M_n$$

(εδώ $[b_{ij}]^* = [\bar{b}_{ji}]$). Δείξτε ότι είναι εσωτερικό γινόμενο. Γενικότερα, αν $\rho \in M_n$ και θέσουμε $\langle A, B\rangle_\rho := \mathrm{Tr}(\rho B^*A),\ A, B \in M_n$, πότε είναι το $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ εσωτερικό γινόμενο στον M_n;

8. Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$\Theta_{u,v} : E \to \mathbb{C} \to F : x \mapsto \langle x, u\rangle \mapsto \langle x, u\rangle v$$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$\Theta_{u,v} = vu^* = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

• Δείξτε ότι ο συζυγής του vu^* είναι ο $(vu^*)^* = uv^*$.

• Βρείτε τη σύνθεση $(vu^*) \circ (wz^*)$. Πότε είναι =0?

• Όταν οι E, F είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, δείξτε ότι κάθε $T \in \mathcal{L}(E, F)$ γράφεται $T = \sum_{k=1}^N s_k v_k u_k^*$ όπου $s_k \in \mathbb{K},\ u_k \in E, v_k \in F$.

• Δείξτε ότι μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια $\{u_1, \ldots, u_N\}$ ορθοκανονική στον E, ή την $\{v_1, \ldots, v_N\}$ ορθοκανονική στον F.

• Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές?

9. Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, ορίζουμε $\hat{f}(n) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi}$.

Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{F}_0 : (C([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_2) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2) : f \mapsto (\hat{f}(n))_n$$

επεκτείνεται σε (γραμμική) ισομετρία από τον $L^2([-\pi, \pi])$ επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$.