Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

5 Απριλίου 2022

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp}: \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp}: \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) *Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.*

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp} : \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) *Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.*

(β) $(\ker P) \perp (\operatorname{im} P)$.

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp}: \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) *Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.*

(β) $(\ker P)\perp(\operatorname{im} P)$.

(γ) $\|P\| \leq 1$.

(παρ Αν $P^2 = P \in \mathcal{B}(H)$ τότε $P \neq 0$ τότε $\|P\| \geq 1$ γιατί $0 \neq \|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2 \Rightarrow \|P\| \geq 1$

Προβολές

Πρόταση

Έστω H *χώρος Hilbert και* $P \in \mathcal{B}(H)$ *ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

Προβολές

Πρόταση

Έστω H *χώρος Hilbert και* $P \in \mathcal{B}(H)$ *ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο* P *είναι η ορθή προβολή επί του* $\operatorname{im} P$.

Προβολές

Πρόταση

Έστω H *χώρος Hilbert και* $P \in \mathcal{B}(H)$ *ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο* P *είναι η ορθή προβολή επί του* $\operatorname{im} P$.

(δ) *Ο* P *είναι αυτοσυζυγής, μάλιστα είναι θετικός.*

Προβολές

Πρόταση

Έστω H *χώρος Hilbert και* $P \in \mathcal{B}(H)$ *ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο* P *είναι η ορθή προβολή επί του* $\operatorname{im} P$.

(δ) *Ο* P *είναι αυτοσυζυγής, μάλιστα είναι θετικός.*

(ε) *Ο* P *είναι φυσιολογικός.*

Προβολές

Πρόταση

Έστω H *χώρος Hilbert και* $P \in \mathcal{B}(H)$ *ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο* P *είναι η ορθή προβολή επί του* $\operatorname{im} P$.

(δ) *Ο* P *είναι αυτοσυζυγής, μάλιστα είναι θετικός.*

(ε) *Ο* P *είναι φυσιολογικός.*

Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής.

$P = P^2 = P^*$

Προβολές

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

(α) Αν $P \in \mathcal{B}(H)$, τότε: P ορθή προβολή $\iff P = P^* = P^2$.

(β) Αν $P = P^2$, τότε $x \in \operatorname{im} P \iff x = Px$ και
$x \in \ker P \iff x \in \operatorname{im}(I - P)$.

(γ) Αν P ορθή προβολή, τότε $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$ για κάθε $x \in H$ και
$Py = y \iff \|Py\| = \|y\|$.

Πρόταση (Η απεικόνιση $P \to \operatorname{im} P$ διατηρεί τη διάταξη)

Αν P, Q είναι ορθές προβολές, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $P \leq Q$ *(β)* $\|Px\| \leq \|Qx\|$ *για κάθε* $x \in H$

(γ) $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$ *(δ)* $QP = P$ *(ε)* $PQ = P$.

(ενδιαφέρα-
τας
$PQ = QP$

Προβολές

$\mathcal{S}(H)$: κλειστοί υπόχωροι του H, $\mathcal{P}(H)$: ορθές προβολές $= \{ P \in \mathcal{B}(H) : P = P^2 = P^* \}$

$$\mathcal{S}(H) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(H):$$

$$M \to P(M)$$

$$\operatorname{im} P \leftarrow P$$

$\operatorname{im} P = (\ker P)^{\perp}$ [illegible]

$$M^{\perp} \to I - P(M)$$

$$N \subseteq M \iff P(N) \leq P(M)$$

Προβολές

Πρόταση

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $P = P(M), Q = P(N)$ είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε

(i) Ο τελεστής $R = PQ$ είναι προβολή αν και μόνον αν $PQ = QP$. Τότε $R = P(M \cap N)$.

Απόδ. Έστω $R = PQ$.

Αν R = προβολή τότε $R = R^*$ οπότε $PQ = (PQ)^* = Q^* P^* = QP$

Αν $PQ = QP$ τότε $R = PQ$ είναι $R^* = QP = PQ = R$

και $R^2 = (PQ)(PQ) = PPQQ = PQ$

Τώρα νδο $\mathrm{Im} R = M \cap N$

Πράγματι, αν $x \in \mathrm{Im} R$ τότε $x = Rx = PQx = P(Qx) \in \mathrm{Im} P$

$= QPx = Q(Px) \in \mathrm{Im} Q$

άρα $x \in M \cap N$

Αντίστροφα, αν $x \in M \cap N$ τότε $Rx = PQx \underset{x \in N}{=} Px \underset{x \in M}{=} x$

άρα $x \in \mathrm{Im}(R)$

Παρ. Αν P προβολή τότε $x \in \mathrm{Im}(P) \iff x = Px$

Πράγματι, αν $x = P(x) \in \mathrm{Im}(P)$ και αντίστροφα αν $x \in \mathrm{Im}(P)$

τότε $x = P(y)$ για κάποιο y οπότε

$Px = P(Py) = Py = x$

Προβολές

Πρόταση

Αν M, N *είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert* H *και* $P = P(M), Q = P(N)$ *είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε*

(i) Ο τελεστής $R = PQ$ *είναι προβολή αν και μόνον αν* $PQ = QP$. *Τότε* $R = P(M \cap N)$.

Προβολές

Πρόταση

Αν M, N *είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert* H *και* $P = P(M), Q = P(N)$ *είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε*

(i) Ο τελεστής $R = PQ$ *είναι προβολή αν και μόνον αν* $PQ = QP$. *Τότε* $R = P(M \cap N)$.

(i') Ει~~δικό~~τερα,

$$M \perp N \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P|_N = 0 \iff Q|_M = 0.$$

Απόδ. $M \perp N$ τότε $\forall x \in H$ έχω $Px \in M$ άρα $Px \perp N$ οπότε $Q(Px) = 0$

(ii)

άρα $QP = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} PQ = (QP)^* = 0$

$\Rightarrow \forall x \in N$ τότε $x = Qx$ οπότε $P(x) = PQx = 0$ άρα $P|_N = 0$

$\Longrightarrow \forall y \in M$ τότε $y = Py$ οπότε $Q(y) = QPy = 0$

Τέλος, αν $Q|_M = 0$ τότε $\forall x \in M$ θα έχω $Qx = 0$ άρα $x \in \ker Q = N^\perp$ οπότε $x \perp N$ άρα $M \perp N$

Προβολές

Πρόταση

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $P = P(M), Q = P(N)$ είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε

(i) Ο τελεστής $R = PQ$ είναι προβολή αν και μόνον αν $PQ = QP$. Τότε $R = P(M \cap N)$.

(i') Ειδικότερα,

$$M \perp N \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P|_N = 0 \iff Q|_M = 0.$$

(ii) Ο τελεστής $S = P + Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $M \perp N$. Τότε $S = P(M + N)$.

Απόδ. (ii): $P \geq 0$, $Q \geq 0$ άρα $S = P + Q \geq 0$

$\Downarrow$

$S \geq P$ και $S \geq Q$

αν S προβολή $\Downarrow$

$SP = P$ δηλ. $(P+Q)P = P$

$\Rightarrow P + QP = P \Rightarrow QP = 0 \Rightarrow M \perp N$

αντίστροφα αν $M \perp N$ τότε $PQ = 0$

επίσης $\underline{S^2} = (P+Q)^2 = P + Q + PQ + QP = P + Q = \underline{S}$ επίσης $\underline{S^*} = P^* + Q^* = \underline{S}$

$\Rightarrow S$ προβολή

Προβολές

Πρόταση

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $P = P(M)$, $Q = P(N)$ είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε

(i) Ο τελεστής $R = PQ$ είναι προβολή αν και μόνον αν $PQ = QP$. Τότε $R = P(M \cap N)$.

(i') Ειδικότερα,

$$M \perp N \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P|_N = 0 \iff Q|_M = 0.$$

(ii) Ο τελεστής $S = P + Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $M \perp N$. Τότε $S = P(M + N)$.

Ο τελεστής $T = P - Q$ είναι προβολή αν $M \supseteq N$ και τότε $T = P(M \cap N^\perp)$

Απόδ. $P - Q$ προβολή άρα $P - Q \geq 0$ άρα $P \geq Q \implies M \supseteq N$

$x \in N$ τότε $Qx = x$ οπότε $Px = PQx = x$ άρα $x \in M$

Αντίστροφα αν $M \supseteq N$

$I - Q = P(N^\perp) = Q^\perp$

τότε $P \geq Q \implies PQ = Q$

άρα $P - Q = P - PQ = P(I - Q) = PQ^\perp = Q^\perp P$ αυτοσυζυγής ως διαφορά δύο αυτοσυζ.

$(P-Q)^2 = PQ^\perp PQ^\perp = PPQ^\perp Q^\perp = PQ^\perp = P - Q$ άρα προβολή

Τότε: $P - Q = PQ^\perp = P(M)P(N^\perp) = P(M \cap N^\perp)$ ∎

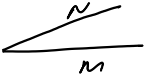
Πρόσ. $P = P(M)$, $Q = P(N)$

$$PQ = QP \iff (M \ominus M\cap N) \perp (N \ominus M\cap N)$$

όπου, αν $L = M\cap N$, $M \ominus L := M \cap L^{\perp}$

(Ειδικότερα, αν $M \cap N = \{0\}$ τότε $PQ = QP \iff M \perp N$)

Παρατ.



στο $\mathbb{R}^2$ $PQ = QP$ $\Updownarrow$

Απόδ. Ονομάζω $R = P(M\cap N)$ (άρα $M \supseteq L$ και $N \supseteq L$)

οπότε $P(M\ominus L) = P(M\cap L^{\perp}) = P - R \geq 0$

$P(N\ominus L) = Q - R \geq 0$

Επομένως, $M\ominus L \perp N\ominus L$

$$\iff (P-R)(Q-R) = 0$$

$$\iff PQ - \underbrace{PR}_{=R} - \underbrace{RQ}_{=R} + \underbrace{R^2}_{=R} = 0$$

$$\iff PQ - R = 0$$

$$\iff PQ = R$$

$$\iff PQ = QP \qquad \blacksquare$$

Προβολές

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, ο $M \cap N$ είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχεται και στον M και στον N.

Προβολές

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, ο $M \cap N$ είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχεται και στον M και στον N.
Ο $\overline{M+N}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει και τον M και τον N.

$M+N = \{x+y : x \in M, y \in N\}$
γραμμ. υπόχωρος, όχι κλειστός γενικά
(σε) [illegible]

$\overline{M+N}$ = κλ. υποχ., $\supseteq M$
$\supseteq N$

και αν L κλ. υποχ. $\supseteq M$
$\supseteq N$
τότε $L \supseteq M+N$ (γρ)
άρα $L \supseteq \overline{M+N}$ (κλ)

Προβολές

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, ο $M \cap N$ είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχεται και στον M και στον N.
Ο $\overline{M+N}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει και τον M και τον N.

Συμβολισμοί:
$$\begin{aligned} P \vee Q &:= P(M \vee N) = P(\overline{M+N}) \\ P \wedge Q &:= P(M \wedge N) = P(M \cap N). \end{aligned}$$

Πρτρ: Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι.
(α) Αν M, N κλειστοί υπόχωροι και $\dim N < \infty$, τότε $M + N$ κλειστός. (ασκ.)

Προβολές

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, ο $M \cap N$ είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχεται και στον M και στον N.
Ο $\overline{M+N}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει και τον M και τον N.

Συμβολισμοί:
$$\begin{aligned} P \vee Q &:= P(M \vee N) = P(\overline{M+N}) \\ P \wedge Q &:= P(M \wedge N) = P(M \cap N). \end{aligned}$$

Πρτρ: Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι.
(α) Αν M, N κλειστοί υπόχωροι και $\dim N < \infty$, τότε $M + N$ κλειστός. (ασκ.)
(β) αν $M \perp N$, τότε $M + N$ κλειστός (γνωστό: από το Πυθαγόρειο...).

Προβολές

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, ο $M \cap N$ είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχεται και στον M και στον N.
Ο $\overline{M+N}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει και τον M και τον N.

Συμβολισμοί:
$$\begin{aligned} P \vee Q &:= P(M \vee N) = P(\overline{M+N}) \\ P \wedge Q &:= P(M \wedge N) = P(M \cap N). \end{aligned}$$

Πρτρ: Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι.
(α) Αν M, N κλειστοί υπόχωροι και $\dim N < \infty$, τότε $M+N$ κλειστός. (ασκ.)
(β) αν $M \perp N$, τότε $M+N$ κλειστός (γνωστό: από το Πυθαγόρειο...).
$\ell^2 \oplus \ell^2$ (γ) Αν $M = \{(x,0) : x \in \ell^2\}$ και $N = \{(y, D_a y) : y \in \ell^2\}$ όπου $a(n) = \frac{1}{n}$, τότε (M, N κλειστοί στον $\ell^2 \oplus \ell^2$ αλλά) $M+N$ όχι κλειστός. (~~ασκ.~~)

$D_a(y(1), y(2), \ldots) = (y(1), \frac{y(2)}{2}, \frac{y(3)}{3}, \ldots)$

(Εξωτερικό) ευθύ άθροισμα H_1, H_2 χώροι Hilbert

$$H_1 \oplus H_2 := \{(x,y) : x \in H_1, y \in H_2\} \qquad (x,y) = x \oplus y$$

γραμμ. πράξεις κ.σ. $(x,y) + \lambda(x',y') = (x+\lambda x', y+\lambda y')$

$$\|(x,y)\| := \left(\|x\|_{H_1}^2 + \|y\|_{H_2}^2\right)^{1/2}$$

$$\langle (x,y),(x',y')\rangle = \langle x,x'\rangle_{H_1} + \langle y,y'\rangle_{H_2}$$

$H_1 \oplus H_2$ = χώρος Hilbert (πληρότητα: ακολουθία τετριμμένη)

Αν $\xi_n = (x_n, y_n)$ είναι ~~βασική~~ βασική

τότε $\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \geq \|x_n - x_m\|_{H_1}^2$

άρα (x_n) είναι βασική στο H_1 οπότε συγκλίνει ΚΛΠ

Επαγωγικά ~~Ομοίως~~ Αν $(H_i)_{i=1}^n$ είναι χώροι Hilbert, ορίζω

$$H_1 \oplus \cdots \oplus H_n = \bigoplus_{i=1}^n H_i$$

$$= (H_1 \oplus \cdots \oplus H_{n-1}) \oplus H_n$$

H_0 : χώρος Hilbert, $A \in \mathcal{B}(H_0)$

Θεωρούμε $H = H_0 \oplus H_0 = \{(x,y) : x,y \in H_0\}$

$\cup|$

$M := H_0 \oplus \{0\} = \{(x,0) : x \in H_0\}$ κλειστός υπόχωρος

$N := Gr(A) = \{(y,Ay) : y \in H_0\}$ γραμμ. υπόχωρος

να είναι κλειστός διότι αν

$(y_n, Ay_n) \to (x,y)$

τότε $\left.\begin{array}{l} y_n \to x \xRightarrow[\text{συν}]{A} Ay_n \to Ax \\ Ay_n \to y \end{array}\right\} Ax = y$

άρα $(x,y) = (x,Ax) \in Gr(A)$

$M+N = \{(x,0)+(y,Ay) : x,y \in H_0\}$ γραμμ. υπόχ.

<u>Ισχ.</u> $M+N$ κλειστός αν και μόνο αν $im(A) = \overline{im(A)}$

<u>Πχ</u> αν $H_0 = \ell^2$, και $A = D_a$ όπου $a = (\frac{1}{n})$

τότε ο υπόχωρος $M+N$ <u>ΔΕΝ</u> είναι κλειστός

<u>Απόδ.</u> <u>Πρώτα</u> $\forall v \in \overline{Im(A)}$ τότε $(0,v) \in \overline{M+N}$

Πράγματι: $\exists (x_n)$ με $x_n \in H_0$: $Ax_n \to v$

<u>άρα</u> $(-x_n, 0) \in M$ $\Rightarrow (0, Ax_n) \in M+N$

$(x_n, Ax_n) \in N$

$\Rightarrow (0,v) = \lim_n (0, Ax_n) \in \overline{M+N}$

Αν ο $M+N$ είναι κλειστός

τότε $(u,v) \in M+N$

ανν $\exists x,y \in H_0$:

$$(u,v) = (x,0) + (y,Ay)$$

$$\Updownarrow$$

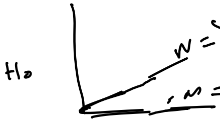
$$x+y = u$$

$$v = Ay \quad \text{άρα} \quad v = Ay \in Im(A)$$

$M+N$ κλειστό $\Longrightarrow$ $Im(A)$ κλειστό

$\Longleftarrow$ (αντίστροφο)

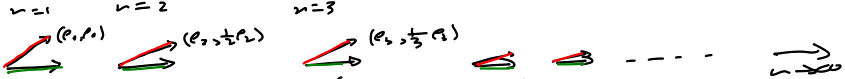
Αν όμως $Im(A)$ όχι κλειστό $\quad M+N \neq \overline{M+N}$



Π.χ. $H_0 = \ell^2 = \overline{span\{e_n\}}$

$M = \overline{span}\{(e_n,0) : n \in \mathbb{N}\}$

$N = Gr(D_a) = \overline{span}\{(e_n, \frac{1}{n}e_n) : n \in \mathbb{N}\}$



$$\theta_n = \text{γωνία}\left((e_n, 0), (e_n, \tfrac{1}{n} e_n)\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

όμως, η γωνία$(M, N) = 0$

παρόλο που $M \cap N = \{0\}$

Προβολές

Πρόταση

Αν (Q_i) είναι φθίνουσα [αύξουσα] ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο[1] *στην προβολή $Q = P(M)$, όπου M είναι η τομή [η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης] των $\operatorname{im} Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$.*

Απόδ (Q_i) φθίνουσα $\iff \forall x, (\langle Q_i x, x\rangle)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

$\iff$ αν $M_i = \operatorname{im}(Q_i)$ τότε $M_i \supseteq M_{i+1}$ $\forall i$

άρα $M = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i$: κλειστός υπόχωρος του H

Πρώτα $\forall x \in M$ ισχύει $x \in M_i$ $\forall i$ οπότε $Q_i x = x$ $\forall x$

νδο $\forall x \in H$ ισχύει $\|Q_i x - Qx\| \to 0$ (αν $x \in M$ ισχύει ναι)

Έστω $x = x_M + x_\perp$ όπου $x_M \in M$, $x_\perp \perp M$

τότε $Q_i x = Q_i x_M + Q_i x_\perp$

$= x_M + Q_i x_\perp$

άρα αρκεί νδο $\|Q_i x_\perp - Q x_\perp\| \to 0$

$x_\perp \perp M = \bigcap M_i$

---

[1] όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν $\{Q_i\}$ άπειρη

Ειδική περίπτωση: έστω ότι $x_\perp \perp M_{i_0}$ για κάποιο i_0

τότε $\forall i \geq i_0$ αφού $x_\perp \perp M_i$ $\forall i \geq i_0$

άρα $G_i(x_\perp) = 0$ $\forall i \geq i_0$

οπότε $\lim\limits_{i\to\infty} G_i(x_\perp) = 0 = G(x_\perp) = 0$

Γενική περίπτωση:

$x_\perp \perp \bigcap M_i$

δηλ. $x_\perp \in$ <u>κλειστή</u> γραμμ. θήκη των $M_i^\perp$

δηλ. $\forall \epsilon > 0$ $\exists y \in$ γραμμ. θήκη των $M_i^\perp$

ώστε $\|x_\perp - y\| < \epsilon$

όμως $M_i \supseteq M_{i+1} \Rightarrow M_i^\perp \subseteq M_{i+1}^\perp$

οπότε $y \in \mathrm{span}(M_i^\perp)$

$\exists i_0 : y \in M_{i_0}^\perp$, οπότε $y \in M_i^\perp$ $\forall i \geq i_0$

οπότε $G_i(y) = 0$ $\forall i \geq i_0$

και έχω $\forall i \geq i_0$

$$\|G_i x_\perp\| = \|G_i x_\perp - G_i y\| \leq \|G_i\| \|x_\perp - y\| \leq \|x_\perp - y\| < \epsilon$$

άρα $\lim\limits_{i\to\infty} \|G_i x_\perp\| = 0$ άρα $\|G_i x_\perp - G x_\perp\| \to 0$

(διότι $x_\perp \in M^\perp$ και $G(x_\perp) = 0$)

Άσκ. Αν N_i είναι κλειστοί υπόχωροι $\subseteq H$: Hilbert

τότε $(\cap N_i)^\perp = \overline{(\text{span}\{N_i^\perp\})}$

$$\Updownarrow$$

Απόδ.

$$(\cap N_i)^{\perp\perp} = \overline{(\text{span}\{N_i^\perp\})}^{\perp}$$

κλειστό $\Updownarrow$

$$\bigcap_i N_i \underset{\text{θδο}}{=} \text{span}\{N_i^\perp\}^\perp$$

έστω $x \in \cap N_i$ τότε $\forall i, x \in N_i$ άρα $\forall i, x \perp N_i^\perp$

$\Downarrow$

$x \perp \text{span}(N_i^\perp)$

άρα $x \in (\text{span}\{N_i^\perp\})^\perp$

αντίστροφα $x \perp \text{span}\{N_i^\perp\}$

$\Downarrow$

$x \perp N_i^\perp, \forall i \implies x \in N_i^{\perp\perp}\ \forall i$

$\implies x \in N_i\ \forall i \implies x \in \cap N_i$

Προβολές

Πρόταση

Αν (Q_i) *είναι φθίνουσα [αύξουσα] ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο* [1] *στην προβολή* $Q = P(M)$*, όπου* M *είναι η τομή [η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης] των* $\operatorname{im} Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$.

Πρόταση

Έστω (P_n) *ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert* H.

[1] όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν $\{Q_i\}$ άπειρη

Προβολές

Πρόταση

Αν (Q_i) *είναι φθίνουσα [αύξουσα] ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο* [1] *στην προβολή* $Q = P(M)$*, όπου* M *είναι η τομή [η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης] των* $\operatorname{im} Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$.

Πρόταση

Έστω (P_n) *ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert* H.

[1] όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν $\{Q_i\}$ άπειρη

Προβολές

Πρόταση

Αν (Q_i) *είναι φθίνουσα [αύξουσα] ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο* [1] *στην προβολή* $Q = P(M)$, *όπου* M *είναι η τομή [η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης] των* $\operatorname{im} Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$.

Πρόταση

Έστω (P_n) *ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert* H.

(i) Αν οι P_n *είναι ανά δύο κάθετες, τότε η σειρά* $\sum_n P_n x$ *συγκλίνει για κάθε* $x \in H$,

[1] όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν $\{Q_i\}$ άπειρη

Προβολές

Πρόταση

Αν (Q_i) *είναι* *φθίνουσα* *[αύξουσα]* *ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει* *κατά σημείο* [1] *στην προβολή* $Q = P(M)$, *όπου* M *είναι* *η τομή* *[η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης]* *των* $\operatorname{im} Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$.

Πρόταση

Έστω (P_n) *ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert* H.

(i) *Αν οι* P_n *είναι ανά δύο κάθετες, τότε η σειρά* $\sum_n P_n x$ *συγκλίνει για κάθε* $x \in H$, *και* $\sum_n P_n x = P(M)x$, *όπου* M *είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των* $\operatorname{im} P_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

<u>Απόδ.</u> $P_n \perp$ ανά δύο οπότε θέτω $Q_1 = P_1$, $Q_2 = P_1 + P_2$: προβολή $\geq Q_1$
... θέτω $Q_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n$: προβολή $\geq Q_{n-1}$
οπότε (Q_n) αύξουσα ακολουθία προβολών άρα
$\forall x$, $\|Q_n x - Qx\| \to 0$ όπου $Q = P(M)$ όπου

[1] όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν $\{Q_i\}$ άπειρη

$M = \overline{\bigcup_n \operatorname{im}(G_n)}$ όπου $\operatorname{im}(G_1) = \operatorname{im} P_1 = M_1$

$\operatorname{im}(G_2) = \operatorname{im}(P_1 + P_2) = M_1 + M_2 = M_1 \oplus M_2$

Επαγωγικά:

$\operatorname{im}(G_n) = \operatorname{im}(P_1 + \dots + P_n)$

$= M_1 \oplus M_2 \dots \oplus M_n$

$= \operatorname{span}\{M_1, \dots, M_n\}$

$M = \overline{\operatorname{span}\{M_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$

Άρα: $\forall x$, $P(M)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_k x = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x$

όπου $P_k x$ ένα $\perp$ ανά δύο

άρα $\| \sum_{k=1}^{n} P_k x \|^2 \overset{\text{ΠΘ}}{=} \sum_{k=1}^{n} \|P_k x\|^2$

$\Rightarrow \|P(M)x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n} P_k x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2$

Προβολές

Πρόταση

Αν (Q_i) *είναι φθίνουσα [αύξουσα] ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο* [1] *στην προβολή* $Q = P(M)$, *όπου* M *είναι η τομή [η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης] των* $\operatorname{im} Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$.

Πρόταση

Έστω (P_n) *ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert* H.

(i) Αν οι P_n *είναι ανά δύο κάθετες, τότε η σειρά* $\sum_n P_n x$ *συγκλίνει για κάθε* $x \in H$, *και* $\sum_n P_n x = P(M)x$, *όπου* M *είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των* $\operatorname{im} P_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Για κάθε $x \in H$ *ισχύει* $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

[1] όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν $\{Q_i\}$ άπειρη

Πρόταση

Αν (Q_i) είναι φθίνουσα [αύξουσα] ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο [1] *στην προβολή $Q = P(M)$, όπου M είναι η τομή [η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης] των $\operatorname{im} Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$.*

Πρόταση

Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H.

(i) Αν οι P_n είναι ανά δύο κάθετες, τότε η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει για κάθε $x \in H$, και $\sum_n P_n x = P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\operatorname{im} P_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Για κάθε $x \in H$ ισχύει $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

(ii) Αν $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ για κάθε $x \in H$, τότε οι P_n είναι ανά δύο κάθετες (επομένως ισχύει το συμπέρασμα του (i).

---

[1] όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν $\{Q_i\}$ άπειρη

נניח עכשיו ש- $\forall x\in H$ מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n x\|^2 \le \|x\|^2$$

נראה $P_n x \perp P_k x$ $\forall n\neq k$

$\forall k$, $\|P_k x\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty}\|P_n x\|^2 \le \|x\|^2$

ובפרט אם $x\in Im(P_k)$ אזי $P_k x = x$ וכן ההגדרה של ההטלה אומרת:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n x\|^2 = \|P_k x\|^2 \quad \text{ולכן } \forall n\neq k \quad \|P_n x\|^2=0$$

ולכן $x \perp Im(P_n)$ $\forall n\neq k$

$Im(P_k) \perp Im(P_n)$ $\forall n\neq k$

הוכחה ~~...~~ אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n x\|^2 \le \|x\|^2$ $\forall x$

$\{P_n\}$ הינה 2⊥

$\Updownarrow$

$P_1+P_2+\dots+P_N \le I$ $\forall N$

$$\iff \forall N,\ \sum_{n=1}^{N}\underbrace{\|P_n x\|^2}_{=\langle P_n x, x\rangle} \le \|x\|^2 \quad \forall x$$

$$\iff \forall N,\ \sum_{n=1}^{N}\langle P_n x, x\rangle \le \langle x, x\rangle$$

$$\iff 0 \le \left\langle \left(\sum_{n=1}^{N} P_n\right)x, x\right\rangle \le \langle x, x\rangle \quad \forall N$$

$$\iff \forall N,\ \sum_{n=1}^{N} P_n \le I \iff \sum_{n=1}^{N} P_n \quad \forall N$$

מונוטונית

Προβολές

Εναλλακτική προσέγγιση:

Πρόταση

Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{m} P_n \leq I$, ισοδύναμα $\left\| \sum_{n=1}^{m} P_n \right\| \leq 1$.*

Προβολές

Εναλλακτική προσέγγιση:

Πρόταση

Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{m} P_n \leq I$, ισοδύναμα $\left\| \sum_{n=1}^{m} P_n \right\| \leq 1$.*

Προβολές

Εναλλακτική προσέγγιση:

Πρόταση

Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{m} P_n \leq I$, ισοδύναμα $\left\| \sum_{n=1}^{m} P_n \right\| \leq 1$.*

(ii) *Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.*

Προβολές

Εναλλακτική προσέγγιση:

Πρόταση

Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{m} P_n \leq I$, ισοδύναμα $\left\| \sum_{n=1}^{m} P_n \right\| \leq 1$.*

(ii) *Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.*

(iii) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η $Q_m := \sum_{n=1}^{m} P_n$ είναι προβολή.*

Προβολές

Εναλλακτική προσέγγιση:

Πρόταση

Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{m} P_n \leq I$, ισοδύναμα $\left\| \sum_{n=1}^{m} P_n \right\| \leq 1$.*

(ii) *Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.*

(iii) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η $Q_m := \sum_{n=1}^{m} P_n$ είναι προβολή.*

(iv) $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ *για κάθε $x \in H$.*

Προβολές

Εναλλακτική προσέγγιση:

Πρόταση

Έστω (P_n) *ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert* H*. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Για κάθε* $m \in \mathbb{N}$*, ισχύει ότι* $\sum\limits_{n=1}^{m} P_n \leq I$*, ισοδύναμα* $\left\| \sum\limits_{n=1}^{m} P_n \right\| \leq 1$.

(ii) *Οι* P_n *είναι ανά δύο κάθετες.*

(iii) *Για κάθε* $m \in \mathbb{N}$*, η* $Q_m := \sum\limits_{n=1}^{m} P_n$ *είναι προβολή.*

(iv) $\sum\limits_{n} \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ *για κάθε* $x \in H$.

Τότε, για κάθε $x \in H$ *η σειρά* $\sum_n P_n x$ *συγκλίνει στο* $P(M)x$*, όπου* M *είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των* $\operatorname{im} P_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *και* $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

Απόδειξη στο αρχείο orthproj.pdf.